

美的曲線の3次元への拡張とB-spline曲線による近似

三浦 憲二郎[†] 藤澤 誠^{††}

意匠設計を行うデザイナーにとって、曲線は製品や作品の形状やシルエットを決定するもっとも基本的なデザイン要素であり、それを美しく魅力的にすることは意匠設計の質を高めるために必要不可欠である。美しい曲線を定式化することが可能であれば、CAD等のデザインツールを開発するうえで、曲線の生成や変形、その品質の評価等において、標準や規範となる曲線を定義、参照することが可能となり、デザインの質を著しく向上させることが期待できる。そのような意匠設計の規範となる曲線を表す式として著者らは「美しい曲線の一般式」を提案した。

しかしながら、美しい曲線の一般式を満たす曲線、すなわち美的曲線は平面曲線に限定されているとともに、既存のCADシステムとの互換性を保証するためにはB-spline曲線への近似による変換が望まれる。そこで、本研究では平面曲線が自己アフィン性を持つための必要十分条件を明らかにするとともに、美的曲線を3次元に拡張する。また、位置の誤差を最小化する最小自乗法と、位置とともに曲率の誤差を最小化する共役勾配法により、美的曲線を近似する3次B-spline曲線を求める。

Extension of the Aesthetic Curves into 3-dimensional Space and Their Approximation with B-spline Curves

KENJIRO T. MIURA[†] and MAKOTO FUJISAWA^{††}

The curve is the most basic design element to determine shapes and silhouettes of industrial products and works for shape designers and it is inevitable for them to make it aesthetic and attractive to improve the total quality of the shape design. If we can find equations of the aesthetic curves, it is expected that the quality of the curve design improves drastically because we can use them as standards to generate, evaluate, and deform the curves. The authors have proposed the general equations of aesthetic curves as such a standard.

However the aesthetic curves expressed by the general equations are limited to planar curves and it is necessary to convert the curves into B-spline forms to guarantee the compatibility of the curves on existing CAD systems. Hence in this paper, at first we show the necessary and sufficient condition for a given curve to have the self-affinity and then extend the aesthetic curves into 3-dimensional space. Furthermore we propose two methods to approximate them with B-spline curves by the least square to minimize the positional errors and the conjugate gradient to minimize the curvature errors as well as the positional ones.

1. はじめに

「美しい曲線」は原田ら^{1),2)}により曲率対数分布図が直線で近似される曲線として提案された。三浦³⁾は曲率対数分布図が厳密に直線で与えられる曲線の解析解を求め、それを「美しい曲線の一般式」として提案した。さらに、吉田と斎藤⁴⁾は「一般式」によって定義される曲線の特徴を解析、分類するとともに、3個の“制御点”により、2つの端点とそこでの接線方向、

および曲率対数分布図の直線の傾き α を与えることにより対話的に「美しい曲線セグメント」を生成する手法を提案した。本研究では「美しい曲線の一般式」を満足する曲線を美的曲線とよぶ。

美的曲線は、対数(等角)らせん($\alpha = 1$)、クロソイド曲線($\alpha = -1$)、さらにインポリュート曲線($\alpha = 2$)を含むとともに、接線ベクトルの積分形式としてのみ与えられている場合($\alpha \neq 1, 2$)であっても対話的な生成、変形が可能であり、実務への応用が期待されている。しかしながら、平面曲線に限定されているとともに、既存のCADシステムとの互換性を保証するため

[†] 静岡大学創造科学技術大学院情報科学専攻
Graduate School of Science and Technology, Shizuoka University

^{††} 静岡大学大学院理工学研究科機械工学専攻
Graduate School of Science and Engineering, Shizuoka University

「美しい」は主観的な日常用語であり、個人の感性に応じて様々な美しい曲線が考えられるので、美しい曲線を「美しい曲線の一般式」で表現される曲線に限定する場合は「美的曲線」とよぶことにした。

には B-spline 曲線による近似が不可欠である．そこで，本研究ではまず平面曲線が自己アフィン性を持つための必要十分条件を明らかにし，さらに美的曲線を 3 次元空間に拡張するとともに，B-spline 曲線による近似法を提案する．

2. 美的曲線

2.1 美しい曲線の一般式

本研究では曲率対数分布図が直線となる曲線を美的曲線と定義する．曲線の曲線長（弧長，路長）を s ，曲率半径を ρ とすると，曲率対数分布図の横軸は $\log \rho$ ，縦軸は $\log(ds/d(\log \rho)) = \log(\rho ds/d\rho)$ となる．曲率対数分布図が直線と与えられることから，ある定数 α が存在して，

$$\log(\rho \frac{ds}{d\rho}) = \alpha \log \rho + C \quad (1)$$

が成り立つ．ここで C は定数である．この式を美しい曲線の基本方程式とよぶ．式 (1) を変形すると，

$$\frac{1}{\rho^{\alpha-1}} \frac{ds}{d\rho} = e^C = C_0 \quad (2)$$

したがって，ある定数 c_0 が存在して，

$$\rho^{\alpha-1} \frac{d\rho}{ds} = c_0 \quad (3)$$

2.2 平面曲線の自己アフィン性

平面曲線の自己アフィン性を次のように定義する³⁾．平面曲線の自己アフィン性：曲線の任意の先端部を削除した曲線に対して，曲線上の各点において接線方向と主法線方向に，別々に異なる拡大縮小率でスケールリングすることにより元の曲線がえられるとき，曲線は自己アフィン性を持つ．

与えられた曲線が式 (3) を満たせばこの定義による自己アフィン性を持つ³⁾．

2.3 自己アフィン性を持つための必要十分条件

曲線長 $s \geq 0$ をパラメータとして定義された曲線 $C = C(s)$ が，その曲率，したがって曲率半径の微分まで連続であると仮定する．したがって，曲線は C^3 連続性を持つ．また，その曲率半径 $\rho(s)$ は 0 でないと仮定する．

接線方向と主法線方向に別々の倍率でスケールリング（曲線に対するアフィン変換³⁾）し，元の曲線 $C(s)$ に一致させることを考える．そこで，与えられた曲線 $C(s)$ を図 1 のように $t = as + b$ ($a, b > 0$) により再パラメータ化する．曲線 $C(t)$ を接線方向に一樣にスケールリングすることは，図 1 に示すように点 $C(t_0 = as_0 + b)$ を点 $C(s_0)$ に対応付けることと等しい．このとき，接線方向の拡大縮小率 f_t は $1/a$ となる．

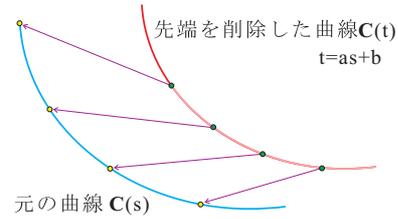


図 1 再パラメータ化の曲線と元の曲線との対応付け

a と b は定数であるが，接線方向と主法線方向の拡大縮小率 f_t と f_n に関連しており，曲線の形状に依存しそれらを独立に指定することはできない．

曲線 $C(t)$ の始点は $s = 0$ を代入してえられる $C(b)$ であり， $C(t)$ は元の曲線 $C(s)$ の $0 \leq s < b$ に対応する部分を削除した曲線となっている．

曲線が自己アフィン性を持つための条件は次のように述べられる．曲線が自己アフィン性を持つための条件：任意の $b > 0$ に対して，ある $a > 0$ が定まり，それらの a, b について，任意の $s \geq 0$ に対して次式が成り立つ．

$$\frac{\rho(s)}{\rho(as + b)} = f_n \quad (4)$$

ここで， f_n は b に依存して定まる定数であり，主法線方向の拡大縮小率となっている． f_n の値はこの式に $s = 0$ を代入し，

$$f_n = \frac{\rho(0)}{\rho(b)} \quad (5)$$

と求まる．

以下の議論を簡潔にするために $f_n = 1$ の場合についてまず述べる．式 (4) より，

$$\rho(s) = \rho(as + b) \quad (6)$$

付録で示す補題より $\rho(s)$ は定数となり，円弧，あるいは直線 ($\rho(s) = \infty$) を表す．

以下では $f_n \neq 1$ と仮定する．式 (4) を変形すると，

$$\rho(s) - f_n \rho(as + b) = 0 \quad (7)$$

曲率半径 $\rho(s)$ が微分可能であることから，

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(s)}{ds} - a f_n \frac{d\rho(t)}{dt} \Big|_{t=as+b} \\ = \frac{d\rho(s)}{ds} - \frac{f_n}{f_t} \frac{d\rho(t)}{dt} \Big|_{t=as+b} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

上式に $s = 0$ を代入して変形すると，

$$f_t = f_n \frac{d\rho(b)}{d\rho(0)} \quad (9)$$

したがって，式 (5) を考慮すると f_n, f_t とともに 2 つの曲線の始点の曲率半径とその微分値により一意に定ま

る .

2.3.1 $f_n/f_t = 1$ の場合

まず, ある $b > 0$ に対して $f_n/f_t = 1$ となる場合, 2.3.3 項と同様の議論をすることにより任意の b について $f_n/f_t = 1$ となる . このとき,

$$\left. \frac{d\rho(s)}{ds} = \frac{d\rho(t)}{dt} \right|_{t=as+b} \quad (10)$$

となる . この式から補題より,

$$\frac{d\rho(s)}{ds} = c_0 \quad (11)$$

c_0 は定数であり, この式を積分すると,

$$\rho(s) = c_0 s + c_1 \quad (12)$$

ここで, c_1 は積分定数である . 式 (12) は対数らせんの曲率半径と直線長の関係式となっており, 曲線は f_t と f_n が一致している特別な自己アフィン性, すなわち自己相似性を持つ .

2.3.2 $f_n/f_t \neq 1$ の場合

次に, $f_n/f_t \neq 1$ の場合は $f_n \neq 1$ なので, ある定数 α が存在して,

$$\frac{f_n}{f_t} = f_n^{1-\alpha} \quad (13)$$

が成り立つ . したがって,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\rho(s)}{ds} = f_n^{1-\alpha} \frac{d\rho(t)}{dt} \right|_{t=as+b} \\ \frac{d\rho(s)}{ds} = \left\{ \frac{\rho(s)}{\rho(as+b)} \right\}^{1-\alpha} \left. \frac{d\rho(t)}{dt} \right|_{t=as+b} \end{aligned} \quad (14)$$

したがって,

$$\rho(s)^{\alpha-1} \frac{d\rho(s)}{ds} = \rho(as+b)^{\alpha-1} \left. \frac{d\rho(t)}{dt} \right|_{t=as+b} \quad (15)$$

したがって, もし α が b に依存しないのであれば補題より, 式 (3) に等しい次式がえられる .

$$\rho(s)^{\alpha-1} \frac{d\rho(s)}{ds} = c_0 \quad (16)$$

ただし, c_0 は定数である . この式を積分することにより, 美しい曲線の第 1 一般式と第 2 一般式がえられる³⁾ .

2.3.3 α が b に依存しないことの証明

この項では α が b に依存しないことを証明する . ここでは b が微小である場合を考え, その微小量を $\Delta b > 0$ とする . Δb に対応して一意に定まる a の値を $1 + \Delta a$, あるいは $1 - \Delta a$, ($\Delta a > 0$) とする . b が正であることの制限を緩め $b = 0$ の場合を考え $\Delta b = 0$ とすると, 式 (4) は自分自身を対応させるので $a = 1$,

$a = 1/f_t$ の関係より, a も b により一意に定まる

したがって $\Delta a = 0$ となる . このとき $f_n = 1$ である . $0 \leq s < \Delta b$ に対応する部分を削除した曲線に対して, 式 (4) が成り立つとともに式 (13) より,

$$\frac{\rho(s)}{\rho((1 \pm \Delta a)s + \Delta b)} = f_n = \left\{ \frac{f_n}{f_t} \right\}^{1-\alpha} \quad (17)$$

を満たす α が存在する . a は b の連続関数であり, Δb を小さくすれば Δa をいくらでも小さくすることができる .

式 (4) において, その s を $(1 \pm \Delta a)s + \Delta b$ で繰り返し置き換えて代入すると,

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{\rho(s)}{\rho((1 \pm \Delta a)s + \Delta b)} \\ f_n &= \frac{\rho((1 \pm \Delta a)s + \Delta b)}{\rho((1 \pm \Delta a)^2 s + \Delta b((1 \pm \Delta a) + 1))} \\ &\dots \\ f_n &= \frac{\rho((1 \pm \Delta a)^{m-1} s + \Delta b((1 \pm \Delta a)^{m-2} + \dots + 1))}{\rho((1 \pm \Delta a)^m s + \Delta b((1 \pm \Delta a)^{m-1} + \dots + 1))} \end{aligned}$$

ここで \pm は曲線に応じて $\Delta a > 0$ となるように適切な符号を選択する . これらの式から,

$$\frac{\rho(s)}{\rho((1 \pm \Delta a)^m s + \Delta b((1 \pm \Delta a)^{m-1} + \dots + 1))} = f_n^m$$

したがって, $b = \Delta b((1 \pm \Delta a)^{m-1} + \dots + 1)$ に対する接線方向の拡大縮小率は $1/(1 \pm \Delta a)^m = f_t^m$ であり,

$$f_n^m = \left\{ \frac{f_n}{f_t} \right\}^{1-\alpha} \quad (18)$$

となり α は Δb に対する値に一致している .

α が一定であることを背理法を用いて証明する . 式 (13) より α は b の連続関数として表せ $\alpha = \alpha(b)$ と書ける . ある $b_0 > \Delta b > 0$ に対して $\alpha_0 = \alpha(b_0)$ とし, α_0 は $\alpha = \alpha(\Delta b)$ と異なり, 正の微小値 ϵ に対して, $|\alpha_0 - \alpha| > 2\epsilon$ (19) と仮定する .

$\alpha(b)$ が連続関数であることから, ある δ が存在し $|b_0 - b| < \delta$ を満たす任意の $b > 0$ に対して

$$|\alpha(b_0) - \alpha(b)| < \epsilon \quad (20)$$

Δa が微小量であることから $1 \pm \Delta a > 0$ であり, $\Delta b((1 \pm \Delta a)^{m-1} + \dots + 1)$ の値は m を増加させることにより, Δb から単調に増加し任意の値を超える . したがって, 次式を満たす m が存在する .

$$\begin{aligned} b_l &= \Delta b((1 \pm \Delta a)^{m-1} + \dots + 1) < b_0 \\ &< b_u = \Delta b((1 \pm \Delta a)^m + \dots + 1) \end{aligned} \quad (21)$$

$b_u - b_l = \Delta b(1 \pm \Delta a)^m$ であり,

$$\Delta b(1 \pm \Delta a)^m < 2\delta \quad (22)$$

であれば $|b_0 - b_l| < \delta$, あるいは $|b_0 - b_u| < \delta$ となる . 式 (22) は $1 \pm \Delta a < (2\delta/\Delta b)^{\frac{1}{m}}$ と変形でき, Δa は Δb を小さくすればそれにしたがって小さくなるのでこの式を満たす Δb が存在する . よって, 式 (20) が

成り立ち式 (19) に矛盾するので α は任意の b に対して一定である。

以上の結果をまとめると、曲線が自己アフィン性を持つための必要十分条件は、ある定数 α について式 (16) が成り立つことである。式 (16) は $\alpha = 1$ の場合には式 (11) となり自己相似の場合を含む。

2.4 自己アフィン率

α の値は曲率対数分布図の傾きであるとともに、前節で述べたように接線方向と主法線方向の拡大縮小率 f_t, f_n に関連し、その曲線の特徴付ける量となっている。式 (13) より α の逆数を γ とすると、

$$\gamma = \frac{1}{\alpha} = \frac{\log f_n}{\log f_t} \quad (23)$$

で与えられる。これは $f_n = f_t^\gamma$ を意味している。

自己相似性を持つフラクタル図形に対して、その次元を表す 1 つの尺度として次のように相似性次元が定義される⁶⁾。もしも、ある図形が、全体を $1/a$ に縮小した相似形 b 個によって成り立っているならば、 $b = a^D$ より、相似性次元は

$$D = \frac{\log b}{\log a} \quad (24)$$

と与えられる。式 (23) はこの式と類似した形式をしており、式 (23) は接線方向に曲線を $1/f_t$ に縮小すると法線方向の空間を満たすには f_n 本の曲線が必要であると解釈できる。 γ は曲線の次元とも捉えることのできる量であり、これを自己アフィン率とよぶ。

3. 3次元への拡張

美しい曲線の一般式によって表現される曲線は平面曲線であり、ここでは、1) フルネー・セレー (Frenet-Serret) の公式に基づいて拡張する方法と、2) 直交する 2 平面内に投影図として美的曲線を指定し、美的曲線を 3 次元化する方法について述べる。

3.1 フルネー・セレーの公式による拡張

曲線長 s の関数として与えられた空間曲線 $C(s)$ に対して、単位接線ベクトルを t 、単位主法線ベクトルを n 、単位従法線ベクトルを b とする。これらのベクトルは次式で与えられるフルネー・セレーの公式により関係付けられる。

$$\begin{aligned} \frac{dC(s)}{ds} &= t, & \frac{dt}{ds} &= \kappa n, \\ \frac{dn}{ds} &= -\kappa t + \tau b, & \frac{db}{ds} &= -\tau n \end{aligned} \quad (25)$$

ここで、 κ は曲率であり τ は捩率である。

平面曲線では従法線ベクトルの向きは一定であり、捩率は常に 0 であるが、空間曲線では捩率を考慮する

必要がある。そこで、まず空間曲線の自己アフィン性を定義し、自己アフィン性を満足する曲線として美的空間曲線を定義する。

平面曲線の自己アフィン性と同様に空間曲線の自己アフィン性を次のように定義する。空間曲線の自己アフィン性：曲線の任意の先端部を削除した曲線に対して、曲線上の各点において接線方向、主法線方向、および従法線方向にそれぞれ異なる倍率でスケールすることにより元の曲線がえられるとき、曲線は自己アフィン性を持つ。

曲率と捩率、したがってそれらの逆数である曲率半径と捩率半径とは独立に指定できるので、捩率半径 $\mu = 1/\tau$ について、式 (1) と同様な次式が成り立つと仮定する。

$$\log\left(\mu \frac{ds}{d\mu}\right) = \beta \log \mu + C' \quad (26)$$

ここで β は定数である。したがって、

$$\mu^{\beta-1} \frac{d\mu}{ds} = c_1 \quad (27)$$

2.3 節で平面曲線の自己アフィン性の必要十分条件が式 (3) であることを示したのと同様の方法で、空間曲線の自己アフィン性の必要十分条件が式 (3) と式 (27) であることが示せる。

フルネー・セレーの公式を連立微分方程式と考え、数値積分により曲線の形状を求めた例を図 2 に示す。左右の図は同じ 5 本の曲線を異なる視点で描画しており、図中最も下に描かれたの曲線は捩率を常に 0 に保ち曲率半径を曲線長の 1 次式として変化させて、平面曲線である対数らせんを描いている。他の曲線は始点と、曲率半径の変化をこの対数らせんと一致させ、捩率半径については $\beta = 1$ として曲線長の 1 次式として変化させている。上の曲線ほど捩率半径の 1 次式の曲線長の係数を小さく (捩率をより大きく) している。各曲線に対して、始点、終点、および曲線上の 2 点で動標構 (フルネー標構) の接線、主法線、従法線の各ベクトルを細い円筒として描いている。

3.2 投影図による 3次元化

直交する 2 つの平面内に境界条件を満足するように 2 本の美的曲線のセグメント (美しい曲線セグメント⁴⁾) に一致) を定義する。2 つの平面を xy, yz 平面とし、それらの平面内に定義される曲線をそれぞれ $C^{xy}(s^{xy}) = (C_x^{xy}(s^{xy}), C_y^{xy}(s^{xy}), 0)$, $0 \leq s^{xy} \leq s_0^{xy}$, $C^{yz}(s) = (0, C_y^{yz}(s_{yz}), C_z^{yz}(s_{yz}))$, $0 \leq s^{yz} \leq s_0^{yz}$ とする。境界条件は、始点、終点が一致することから、 $C_y^{xy}(0) = C_y^{yz}(0)$, $C_y^{xy}(s_0^{xy}) = C_y^{yz}(s_0^{yz})$ である。空間曲線上の任意の点において、そこでの接線

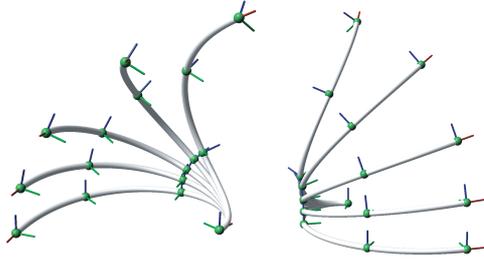


図 2 フルネー・セレーの公式による拡張

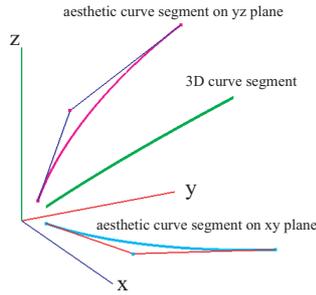


図 3 投影図による三次元化

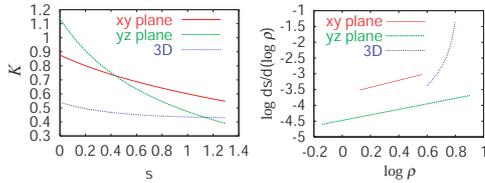


図 4 曲率と曲率対数分布図

ベクトルと法線ベクトルを $t = (t_x, t_y, t_z)$, $n = (n_x, n_y, n_z)$ とする。また、 $C^{xy}(s^{xy})$, $C^{yz}(s^{yz})$ の対応する点における曲率をそれぞれ κ^{xy} , κ^{yz} とする。 $A = (t_x^2 + t_y^2)^{\frac{3}{2}} \kappa^{xy}$, $B = (t_y^2 + t_z^2)^{\frac{3}{2}} \kappa^{yz}$, さらに $C = \{(t_y^2 + t_z^2)B^2 + (t_y^2 + t_x^2)A^2\}^{-\frac{1}{2}}$ とおくと、空間曲線の曲率 κ は、 $\kappa = 1/(Ct_y)$ と求まる⁵⁾。この式からわかるように、この拡張法では自己アフィン性は保証されない。

図 3 に 2 本の美的曲線セグメントを投影図とする 3 次元曲線の例を示す。これらの曲線の曲線長に対する曲率と曲率対数分布図は図 4 で与えられる。xy, yz 平面内の 2 本の美的曲線セグメントの曲率対数分布図のグラフが直線であるのに対して、3 次元曲線のそれは直線ではなく自己アフィン性が成り立っていないことがわかる。

4. B-spline 曲線による近似

意匠デザインに用いられる高品質な曲線を評価する

には、曲線そのものを評価するとともにその縮閉線を評価することが有効である⁴⁾。美的曲線の曲率半径は滑らかに変化し、その縮閉線も滑らかな曲線となる。近似に用いる目的関数として、1) 最小自乗法による位置の誤差と、2) 共役勾配法による位置、および曲率の誤差を用いる。

4.1 位置の誤差

美的曲線を $C(s)$, その曲線を近似する 3 次 B-spline 曲線を $C_b(t)$ とする。 $C(s)$ に対して等間隔に m 個の点 $Q_i = C(s_i)$ をサンプリングし、以下の目的関数を最小化する。

$$R_p = \sum_{i=0}^{m-1} |C_b(t_i) - Q_i|^2 \quad (28)$$

C_b の定義域を $0 \leq t \leq 1$, 制御点を $P_i, i = 0, \dots, n$ (したがって、B-spline 曲線のセグメント数は $n - 2$) とし、始点と終点はそれぞれ制御点 P_0 と P_n に一致するようにノットを多重化する。各サンプリング点に対応するパラメータ t_i は、 $C(s)$ の全曲線長 l に対して $t_i = s_i/l$ と定める。 $C(s)$ の始点、終点での接線ベクトルを t_s, t_e とする。始点、終点の位置、及び接線方向を一致させるように、 $P_0 = C(0)$, $P_n = C(l)$, $P_1 = P_0 + \alpha t_s$, $P_{n-1} = P_n - \beta t_e$ と定式化する。

式 (28) の変数は、スカラー変数 α, β と制御点 $P_i, i = 2, \dots, n - 2$ の x, y 座標値であり、これらの変数の 2 次式として式 (28) が与えられるので最小自乗法により最小化できる。

4.2 曲率の誤差

前節と同様の 3 次 B-spline 曲線を用いて近似を行うが、曲率の誤差も考慮するように以下の目的関数を最小化する。

$$R_{pc} = \sum_{i=0}^{m-1} \{ |C_b(t_i) - Q_i|^2 + w |\Psi(t_i) - \kappa(s_i)|^2 \} \quad (29)$$

ここで、 w は曲率の誤差の重みを制御する係数であり、 $\Psi(t_i)$ は B-spline 曲線の曲率、 $\kappa(s_i)$ は元の曲線の対応点での曲率である。 $\Psi(t) = |dC_b(t)/dt \times d^2C_b(t)/d^2t| / |dC_b(t)/dt|^3$ と与えられるので、式 (29) は最小自乗法では解けず、探索による数値解法である共役勾配法を用いて最小化する。 α, β , 及び制御点の初期値は式 (28) を最小化する変数の値を用いる。

4.3 近似結果

$\alpha = 1$ (対数らせん) の場合についての最小自乗法による近似結果を図 5 に、誤差の値を表 1 に示す。共役勾配法 ($w = 1$) による誤差の値を表 2 に示す。最適化

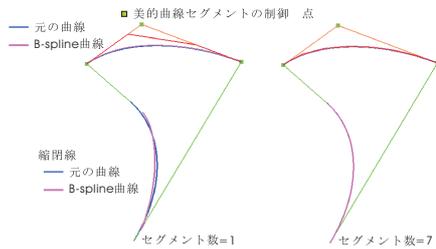


図 5 近似曲線と縮閉線

表 1 B-spline 曲線による近似:最小自乗法

seg 数	1	3	7
rms_p	3.966×10^{-3}	1.909×10^{-4}	5.924×10^{-6}
e_p^{max}	5.878×10^{-3}	4.405×10^{-4}	2.006×10^{-5}
rms_ρ	6.750×10^{-2}	1.204×10^{-2}	1.743×10^{-3}
e_ρ^{max}	1.660×10^{-1}	3.653×10^{-2}	6.559×10^{-3}
rms_e	6.911×10^{-2}	1.219×10^{-2}	1.747×10^{-3}
e_e^{max}	1.660×10^{-1}	3.668×10^{-2}	6.559×10^{-3}

表 2 B-spline 曲線による近似:共役勾配法 ($w = 1$)

seg 数	1	3	7
rms_p	3.984×10^{-3}	1.909×10^{-4}	5.942×10^{-6}
e_p^{max}	6.012×10^{-3}	4.393×10^{-4}	2.046×10^{-5}
rms_ρ	6.800×10^{-2}	1.205×10^{-2}	1.737×10^{-3}
e_ρ^{max}	1.814×10^{-1}	3.653×10^{-2}	6.539×10^{-3}
rms_e	6.952×10^{-2}	1.220×10^{-2}	1.741×10^{-3}
e_e^{max}	1.814×10^{-1}	3.668×10^{-2}	6.539×10^{-3}

のためのサンプリング数を 100 とし、誤差計算のためのサンプリング数を 1000 とした。表中 rms は誤差の 2 乗平均の平方根を意味し、曲線長が 1 になるように正規化している。添え字は p は位置、 ρ は曲率半径、 e は縮閉線の位置を意味している。これらの表からわかるように 2 つの手法の誤差は同程度であり、曲率の誤差を目的関数として最小化しなくても十分なサンプリング数とセグメント数を与えれば、曲線そのものとともにその縮閉線をも精度良く近似できることがわかる。これは、1) 任意の数のサンプリングが可能であるとともに、2) 美的曲線の正確な曲線長がえられるため t_i の最適化が不要なことによると考えられる。

5. おわりに

本研究では平面曲線が自己アフィン性を持つための必要十分条件を明らかにするとともに、自己アフィン性を持つ曲線である美的曲線を 2 通りの方法で 3 次元に拡張した。1) フルネー・セレーの公式を用いて曲率とともに捩率の逆数である捩率半径の定数乗を曲線長の一次式として与えることにより定義した。この場合は空間曲線としての自己アフィン性が保証される。2)

直交する 2 つの平面に対して、それぞれ平面曲線である美的曲線を射影として指定し、それらの曲線から空間曲線を定義した。また、位置の誤差を最小化する最小自乗法と、位置とともに曲率の誤差を最小化する共役勾配法により美的曲線を近似する 3 次 B-spline 曲線を求めた。美的曲線に対して、1) 任意の数のサンプリングが可能であることと、2) 正確な曲線長が与えられることから、曲率の誤差を目的関数として最小化しなくても、十分なサンプリング数とセグメント数を与えれば、位置の誤差を最小化することによって曲線そのものとともにその縮閉線も精度良く近似できることを示した。

参考文献

- 1) 原田利宣, 森典彦, 杉山和雄, 曲線の物理的性質と自己アフィン性, デザイン学研究, Vol.42, No.3, pp.33-40, 1995.
- 2) 原田利宣, 吉本富士市, 森山真光, 魅力的な曲線とその創生アルゴリズム, 形の科学会誌, Vol.13, No.3, pp.149-158, 1997.
- 3) 三浦憲二郎, 美しい曲線の一般式, グラフィックスと CAD/Visual Computing 合同シンポジウム 2005 予稿集, pp.227-232, 2005.
- 4) 吉田典正, 斎藤隆文, 美しい曲線セグメント, 情報処理学会研究報告 Vol.2005, No.116 (第 121 回グラフィクスと CAD 研究会), pp.97-102, 2005.
- 5) M. Hosaka, Modeling of Curves and Surfaces in CAD/CAM, Springer-Verlag, 1992.
- 6) 高安秀樹, フラクタル, 朝倉書店, 1986.

付 録

A.1 補 題

補題: s をパラメータとする関数 $f(s)$ に対して、任意の $b > 0$ に対して、 $a > 0$ が定まり、それらの a, b について、任意の $s \geq 0$ に対して次式が成り立つ。

$$f(as + b) = f(s) \quad (30)$$

このとき、関数 $f(s)$ は定数である。

証明: 関数 $f(s)$ は定数でないと仮定する。したがって、ある $s_0 > 0$ が存在して、

$$f(s_0) \neq f(0) \quad (31)$$

$b = s_0$ とすると、ある $a_0 > 0$ が存在して、

$$f(a_0 s + s_0) = f(s) \quad (32)$$

s に 0 を代入すると $f(s_0) = f(0)$ が得られ式 (31) に矛盾する。したがって、 $f(s)$ は定数である

補題は、任意の $b > 0, a = a(b) > 0$ に対して、ある関数を原点を中心として a により拡大縮小し b だけ左に平行移動した関数が元の関数に一致する場合、その関数は定数であることを意味している。