



# 対数型美的曲線を用いた $G^2$ Hermite 内挿法\*

三浦憲二郎\*\* 澁谷 大\*\*\* 臼杵 深\*\* 蘭 豊礼† 玉井博文† 牧野 洋††

## $G^2$ Hermite Interpolation with the Log-aesthetic Curve

Kenjiro T. MIURA, Dai SHIBUYA, Shin USUKI, Fengli LAN, Hirofumi TAMAI and Hiroshi MAKINO

Although the log-aesthetic curves are generally expressed only by an integral form of the tangent vector, it is possible to interactively generate and deform them and they are expected to be utilized for practical use of industrial and graphical design. In this paper we propose a novel method to solve the  $G^2$  Hermite interpolation problem with the log-aesthetic plane curve as well as a new method to generate an  $S$ -shaped curve for  $G^1$  Hermite interpolation. The methods proposed in the paper have been implemented as a plug-in module for a commercial CAD system and are successfully used for practical design.

**Key words:** log-aesthetic curve,  $G^2$  Hermite interpolation, triple log-aesthetic curve segments,  $S$ -shaped curve

### 1. 序 論

対数型美的曲線 (log-aesthetic curve, LA 曲線) は, 対数 (等角) らせん, クロソイド曲線, 円インボリュート曲線, さらに Nielsen のらせんを含むとともに, 接線ベクトルの積分形式としてのみ与えられている場合であっても対話的な生成, 変形が可能であり, 実務への応用が期待されている<sup>1,2,3)</sup>.

LA 曲線に関連する最近の研究として, 一般化対数型美的曲線 (GLAC) を標準形で定式化するとともに, 曲率対数グラフの傾きを曲線長の関数として定式化し, 一般化コルニュらせんではその傾きが 1 次式で与えられることが報告されている<sup>4)</sup>. また, 不完全ガンマ関数により LA 曲線を解析的に表現する方法が考案され, これまでの定式化に比較して約 10 倍の速度で曲線を生成できることが示された<sup>5)</sup>. さらに, Meek ら<sup>6)</sup> は曲率対数グラフの傾き  $\alpha < 0$  において,  $G^1$  エルミート (Hermite) 内挿における解の一意性を証明しており, 徐々に研究が盛んになっている.

本研究では, 平面曲線に限定して, LA 曲線を用いて両端点の位置とそこでの接線方向, および曲率が指定された曲線を生成する問題の解法, すなわち  $G^2$  エルミート内挿法を提案する. 両端点の位置とそこでの接線方向を満足する  $G^1$  エルミート内挿法は, Yoshida ら<sup>3)</sup> により提案されている. また, 彼らの方法に基づいて, 複数の LA 曲線セグメントからなる曲線を, 接続点での接線方向を変更して曲率を連続にする方法も開発されている<sup>7)</sup>. しかしながら, この方法では, セグメント間の接続点での接線方向を指定することができず,  $G^2$  エルミート内挿法ではない.

一方, ロボットの軌道生成のためにクロソイド曲線を用いる方法が提案されている<sup>8,9,10,11)</sup>. 特に蘭ら<sup>10)</sup> は牧野の方法<sup>9)</sup> を拡張して, クロソイド曲線を用いた  $G^2$  エルミート内挿法を提案している. 単一のクロソイド曲線セグメントでは自由度が不

足するため, 彼らの方法では, 3 本のセグメントを連結した三連クロソイド曲線を用いて内挿に必要な自由度を確保している.

クロソイド曲線は LA 曲線に含まれており, 曲率対数グラフの傾きを固定すれば, 両者の自由度は等しく, 本研究では, 蘭らの手法に準じて三連 LA 曲線セグメントを用いる. 本論文では, まず LA 曲線の基本式を述べ, 単一セグメントによる内挿法について Yoshida ら<sup>3)</sup> と牧野<sup>9)</sup> の方法を比較するとともに,  $S$  字曲線の入力法について新たに提案する. さらに, 三連 LA 曲線を用いた  $G^2$  エルミート内挿法を提案する.

### 2. 対数型美的曲線による $S$ 字曲線の入力

$S$  字曲線は様々なデザインで用いられており, 意匠設計において重要な曲線である<sup>13)</sup>. これまでに提案された LA 曲線の入力法<sup>3,14)</sup> では,  $S$  字曲線は曲率対数グラフの傾き  $\alpha$  が負の場合に限定されることもあり議論されていない. それに対して, ロボットの軌道生成において  $S$  字曲線は不可欠であり, 牧野らの手法<sup>8,9,10)</sup> では用いる曲線をクロソイド曲線 ( $\alpha = -1$ ) に限定しており,  $S$  字である場合とそうでない場合は区別されない. 本章では, Yoshida ら<sup>3)</sup> と牧野の方法<sup>9)</sup> を比較するとともに, Yoshida らの方法を  $S$  字曲線も入力できるように拡張する.

#### 2.1 対数型美的平面曲線の基本式

蘭らの方法<sup>10)</sup> に基づいて  $G^2$  エルミート内挿法の定式化を行うため, ここでは, 彼らの方法を LA 曲線に拡張した形式で曲線を定式化する.

曲線長を  $s$  とし, 曲線の全長を  $h$  とすると,  $S = s/h$  ( $0 \leq S \leq 1$ ) は無次元の曲線長を表す. このとき LA 平面曲線は一般的に次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{P}_0 + \int_0^s \mathbf{u} ds = \mathbf{P}_0 + h \int_0^S \mathbf{u} dS \\ 0 \leq s \leq h, \quad 0 \leq S = \frac{s}{h} \leq 1 \end{aligned} \quad (1)$$

ここで,  $\mathbf{P}_0$  は曲線の始点であり,  $\mathbf{u}$  は曲線の単位接線ベクトルを表す. したがって,  $\mathbf{u}$  を  $S$  の関数として定義すれば曲線の形状は決定される.

自己アフィン性等の LA 曲線の性質を解析する場合, 曲線の定義に通常曲率半径を用いるが, 直線を例外とせずに表現でき

\* 原稿受付 平成 24 年 9 月 19 日  
\*\* 正 会 員 静岡大学 (静岡県浜松市中区城北 3-5-1)  
\*\*\* 学生会員 静岡大学大学院 (静岡県浜松市中区城北 3-5-1)  
† 正 会 員 マッスル株式会社 (大阪市淀川区木川東 2-5-35)  
†† 名誉会員 牧野オートメーション研究所 (東京都杉並区高円寺南 1-24-14-703)

ることと曲線形状の算出にフルネ-セレ式を用いることを考慮して、本研究では曲線のパラメータとして曲線長を、その定義に曲率を用いる。

曲率対数グラフの傾き  $\alpha \neq 0$  の場合、LA 曲線の符号付き曲率  $\kappa(S)$  を次式で与える。

$$\kappa(S) = \begin{cases} (c_0S + c_1)^{-\frac{1}{\alpha}} & \text{if } c_0S + c_1 \geq 0 \\ -(-c_0S - c_1)^{-\frac{1}{\alpha}} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

この定義では、たとえば曲線が左曲りでの曲率を正、右曲りでの曲率を負と定義すると、左曲りの曲線の鏡像として右曲りの曲線が得られる。 $\alpha = 0$  の場合は、

$$\kappa(S) = c_0 e^{c_1 S} \quad (3)$$

で与え、符号については  $c_0$  で正負を指定する。

曲線の方向角を  $\phi(S)$  とすると、 $\alpha \neq 0, 1$  かつ  $c_0 \neq 0$  と仮定すると、

$$\phi(S) = \begin{cases} \frac{\alpha}{(\alpha-1)c_0}(c_0S + c_1)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + c_2 & \text{if } c_0S + c_1 \geq 0 \\ \frac{\alpha}{(\alpha-1)c_0}(-c_0S - c_1)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + c_2 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

ここで、 $c_2$  は積分定数である。上式において  $c_0S + c_1 < 0$  の場合に第 1 項の符号が反転しないことに注意する。絶対値を用いれば以下のように簡潔に表すことができる。

$$\phi(S) = \frac{\alpha}{(\alpha-1)c_0} |c_0S + c_1|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + c_2 \quad (5)$$

$c_0 = 0$  の場合は、曲線は直線、または円弧となり、これらを、

$$\phi(S) = \begin{cases} (c_1)^{-\frac{1}{\alpha}} S + c_2 & \text{if } c_1 \geq 0 \\ -(-c_1)^{-\frac{1}{\alpha}} S + c_2 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

と与える<sup>1)</sup>。

$\alpha = 0$  の場合は、

$$\phi(S) = \frac{c_0}{c_1} e^{c_1 S} + c_2 \quad (7)$$

と与えられ、 $\alpha = 1$  の場合は、

$$\phi(S) = \frac{1}{c_0} \log |c_0S + c_1| + c_2 \quad (8)$$

と与えられる。直線や円弧になる場合には適宜式を変更する。

## 2.2 Yoshida らと牧野の方法の比較

Yoshida ら<sup>3)</sup> の提案した、LA 曲線の入力に用いられる方向角の第 2 標準形は次式で与えられる。

$$\phi(s) = \begin{cases} \frac{1-e^{\Lambda s}}{\Lambda} & \text{if } \alpha = 0 \\ \frac{\log(\Lambda s + 1)}{\Lambda} & \text{if } \alpha = 1 \\ \frac{(\Lambda \alpha s + 1)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - 1}{\Lambda(\alpha-1)} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9)$$

この形式では、曲線の始点での接線方向を  $x$  軸の正の向きとし、原点での曲率半径を 1 としている。さらに、 $\Lambda \geq 0$  と限定することで、曲率半径は  $\Lambda \neq 0$  で単調増加となり、 $\Lambda = 0$  で曲率半径は一定となり曲線は円弧となる。

この定式化では、始点と終点、およびそれらの点での接線ベクトルを定める点の、いわゆる 3 点の制御点を必要に応じて鏡像に変換した後、それらが形成する三角形と相似になるように、 $\Lambda$  を探索することで曲線を求める。

<sup>1)</sup>  $-1/\alpha < 0$ 、したがって  $\alpha > 0$  の場合、 $c_1^{-1/\alpha}$  は 0 と成りえず、直線を表すことはできない。直線を表す必要がある場合は定式化を適宜変更する。

一方、牧野の方法<sup>9)</sup> では、曲線長を無次元化するとともに、始点を原点に移動し、終点を  $x$  軸上にその座標値が正になるように移動する。始点、終点での方向角から、式 (4) のパラメータ  $c_1$ 、および  $c_2$  を  $c_0$  の 1 次式で表し、終点の  $y$  座標が 0 となる  $c_0$  を探索することで曲線を算出する。

曲線を無次元化することは、曲線の寸法をパラメータの探索から排除することであり、制御点が構成する三角形の相似形を利用することと同じである。両者は  $G^1$  エルミート内挿をパラメータ 1 個の探索問題に帰着しており、本質的に同じと考えられる。ただし、Yoshida らの方法<sup>3)</sup> では、 $\Lambda$  の下限が 0 であること、また  $\alpha = 1$  の場合を除いて、 $\Lambda$  の上限が与えられることから、実装においては Yoshida らの方法が有利と考えられる。したがって、以下では彼らの方法に基づいて  $S$  字曲線を生成する方法を提案する。

ただし、 $G^2$  エルミート内挿においては、曲線が持つ自由度を上げるため複数の曲線セグメントを  $C^2$  連続となるように接続する必要があり、始点での曲率半径が常に 1 となる第 2 標準形では、第 2 セグメント以降を定式化することができず、より一般的な形式を採用する必要がある。また、接続条件をさらに厳しくして  $C^3$  連続とするために  $n$  連とする、といった拡張を考えると一般的な形式化が望ましい。さらに、各セグメントの端点での方向角を推定することが困難となり曲線長を簡単に算出できない。そこで、第 3 章ではより一般的な定式化である、牧野の方法<sup>9)</sup> の拡張である蘭らの方法<sup>10)</sup> に基づき、LA 曲線全体に適用できる新たな  $G^2$  エルミート内挿法を提案する。

## 2.3 曲率対数グラフの傾きに関する制限

$S$  字曲線を表すためには、曲率の正負が反転する必要があり、曲率の連続性を仮定すれば変曲点を持つ必要がある。第 2 標準形で表された LA 曲線の曲率  $\kappa(s)$  は次式で与えられる。

$$\kappa(s) = \begin{cases} e^{-\Lambda s} & \text{if } \alpha = 0 \\ (\Lambda \alpha s + 1)^{-\frac{1}{\alpha}} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10)$$

変曲点では曲率  $\kappa(s) = 0$  であり、 $\alpha = 0$  の曲線 (Nielsen's spirial) は変曲点を持たない。また、 $\alpha > 0$  であれば、 $\Lambda \alpha s + 1 = \pm \infty$  とならねばならないが、有限の曲線長  $s$  の範囲ではそのような値にはならない。したがって、 $\alpha < 0$  の場合のみ変曲点を持つ。

## 2.4 $S$ 字曲線の入力法

$\alpha < 0$  の場合の曲線に対して終点での方向角  $\phi$  により曲線長  $s$  は次式で与えられる。

$$s = \frac{\{1 + (\alpha - 1)\Lambda\phi\}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - 1}{\Lambda\alpha} \quad (11)$$

曲線が  $S$  字となるためには、変曲点までの距離  $s_0$  を  $s$  が越えることが必要である。 $s_0$  は曲率  $\kappa(s) = 0$  の条件より次式で与えられる。

$$s_0 = -\frac{1}{\Lambda\alpha} \quad (12)$$

上式は  $\alpha < 0$  であることから  $s_0 > 0$  であることに注意する。方向角が 0 度を越えて減少する場合はその値を負すると、距離  $s_0$  の位置で方向角は最大となり、

$$\phi_{max} = \frac{1}{(1 - \alpha)\Lambda} \quad (13)$$

と与えられる。終点での方向角がこの角度以上に指定された場合、ループ (方向角が 360 度以上変化すること) を許さなければ曲線を生成することはできない。

式 (11) を  $s_0$  を用いて書き直すと、

$$s = s_0 + \frac{\{1 + (\alpha - 1)\Lambda\phi\}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\Lambda\alpha} \quad (14)$$

変曲点においても曲線のすべての次数の連続性は保たれており、接線ベクトル、曲率、曲率の微分値等連続となる。S 字を仮定すると、上式の第 2 項は、 $\phi$  の増加にともない、 $\phi_{max}$  までは増加するが、それを越えると方向角 (図 1 の  $\phi_D$ ) は減少しはじめる。そこで、第 2 項の正負を反転して、 $s_1$  を次式で計算する。

$$s_1 = -\frac{\{1 + (\alpha - 1)\Lambda\phi\}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\Lambda\alpha} \quad (15)$$

このとき、 $\alpha < 0$  より  $s_1 > 0$  であることに注意する。曲線全体の曲線長  $s$  は  $s_0 + s_1$  で与えられる。

### 2.5 S 字入力アルゴリズム

S 字入力においては、制御点を 4 点使用する。これは 3 点の制御点では、それらの点が一直線上になければ、始点と終点との接線ベクトルは第 2 制御点で交差し、例えば、始点と終点との接線ベクトルを平行とすること、さらにそれらのなす角度を負 (時計回り) にすることができないからである。

以下の手順で S 字曲線を入力する。

1. 制御点に、平行移動、回転移動を施すことにより、始点を原点、そこでの方向角を 0 とする。
2. 終点での方向角  $\phi_D$ 、および原点と終点を結ぶ直線と  $x$  軸とのなす角  $\phi_E$  を算出する (図 1 参照)。
3.  $\phi_D$ 、および  $\phi_E$  から、S 字か、そうでないかを判定する。例えば、図 2 のように始点、終点、およびそれらの位置での接線の交点で三角形を構成し、その三角形の内部に曲線がある場合 (図 2(a)) 場合は S 字でない判定し、三角形を構成しない、あるいはその内部に曲線がない場合 (図 2(b)) 場合は S 字である、とする。S 字であると判定した場合以下の処理を行う。
4.  $\Lambda$  の最小値は 0 であり、最大値に関して  $\Lambda$  が満たすべき式は次式である。

$$1 + (\alpha - 1)\Lambda\phi_{max} \geq 0 \quad (16)$$

$\phi_{max} > 0$  であるので、次式が得られる。

$$\Lambda \leq \frac{1}{(1 - \alpha)\phi_{max}} \quad (17)$$

ただし、式 (13) より、上式は常に成り立つので、 $\Lambda$  の上限はなくいくらでも大きな値となり得る。

5.  $\phi_D$  より、曲線長  $s = s_0 + s_1$  を算出する。 ( $\phi_D < \phi_{max}$  であることを確認する。)
6.  $s$  を用いて曲線の終点を計算し、 $\phi_E$  の値と比較する。
7.  $\phi_E$  より小さければ  $\Lambda$  を減少させ、大きければ増加させる。
8. 収束するまで上記ステップ 5., 6., および 7. を繰り返す。

上記のアルゴリズムにおいて、パラメータ  $\Lambda$  の下限値は 0 であるが、上限値を定めることはできず、牧野の方法<sup>9)</sup>との差異はあまりない。しかしながら、曲線長と方向角との関係が式 (15) で与えられており、360 度以上方向角が変化するループを避けることができる。

図 3 に同じ境界条件 (始点、終点、そこでの接線方向) に対する、異なる  $\alpha$  値を持つ LA 曲線とその曲率を描画した例を示す。S 字曲線では、 $\alpha$  値により大きく形状が変化することがわかる。パラメータ探索に要する処理時間は約 15~20ms であった<sup>2)</sup>。

<sup>2)</sup>本研究のすべての数値実験に、CPU:Core i 7, 3.4GHz, 主記憶:8GB

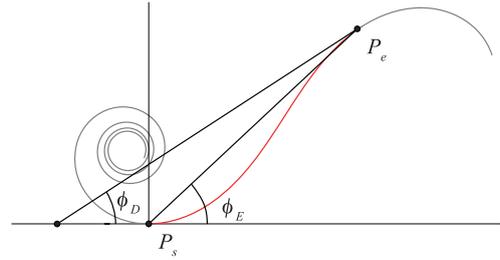


Fig. 1 Input of an S-shaped curve

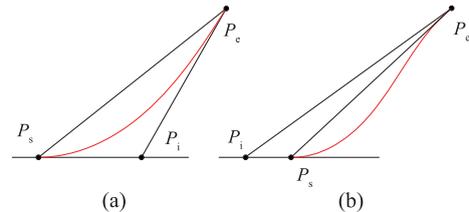


Fig. 2 Decision criterion of S-shape

### 3. 三連対数型美的曲線

蘭らの提案した三連クロソイドによる  $G^2$  補間で用いられた方法に準じて、LA 曲線を 3 本連結することで両端点での接線方向と曲率を同時に指定することを可能とする。三浦ら<sup>7)</sup>は LA 曲線の自由度を最大限利用するために端点で曲率が 0 になるように LA 曲線の曲率対数グラフの傾き  $\alpha$  を変数の 1 つとして用いた。しかしながら、 $\alpha$  は曲線の印象に関連しているとの報告<sup>12)</sup>があり、単一の LA 曲線や、それらのセグメント 2 本を  $G^3$  連続で連結させた複合リズム LA 曲線による  $G^1$  内挿法では  $\alpha$  を定数としている。本研究でも、 $\alpha$  はデザイナーが指定できる定数とし、形状を定めるための変数とはしない。この条件において、パラメータ数は三連クロソイドによる  $G^2$  エルミート内挿と同数となることに注意する。

#### 3.1 三連対数型美的平面曲線の定義

LA 曲線セグメントを 3 本連結した三連 LA 曲線において、以下の議論で各セグメントの曲率対数グラフの傾き  $\alpha$  をそれぞれ異なる値を用いて定式することも可能である。しかしながら、セグメント間の曲率と方向角を連続にする条件式が簡単化すること、実用上通過点間の曲線に同じ  $\alpha$  値を持たせることは自然であることから、これらのセグメントの  $\alpha$  値は同一とする。曲線全長を 1 と仮定し、三連 LA 平面曲線の曲率  $\kappa(S)$  を正、または 0 と仮定して以下の各式で定義する。ここで、 $\kappa(S) \geq 0$  と仮定するのは式が不必要に煩雑になることを避けるためであり、曲率が負となっても、あるいは曲線が変曲点を持ちその正負が反転してもなんら不都合はない。また、 $\alpha \neq 0, 1$  として定式化する<sup>3)</sup>。

$$\kappa(S) = \begin{cases} (c_{10}S + c_{11})^{-\frac{1}{\alpha}} & 0 \leq S \leq S_1 \\ (c_{20}S + c_{21})^{-\frac{1}{\alpha}} & S_1 < S \leq S_2 \\ (c_{30}S + c_{31})^{-\frac{1}{\alpha}} & S_2 < S \leq 1 \end{cases} \quad (18)$$

$S_1, S_2$  をパラメータとすることも可能であるが、蘭らの手法に従い、本研究では  $S_1 = 0.25, S_2 = 0.75$  と固定する<sup>4)</sup>。

の PC を用いた。

<sup>3)</sup> $\alpha = 0, 1$  の場合もパラメータ数は同じであり同様に定式化できる。

<sup>4)</sup>複合リズム曲線では、2 本のセグメントの接続点での方向角が指定できる<sup>14)</sup>が、それはそれらの距離の比率を可変としていることに起因

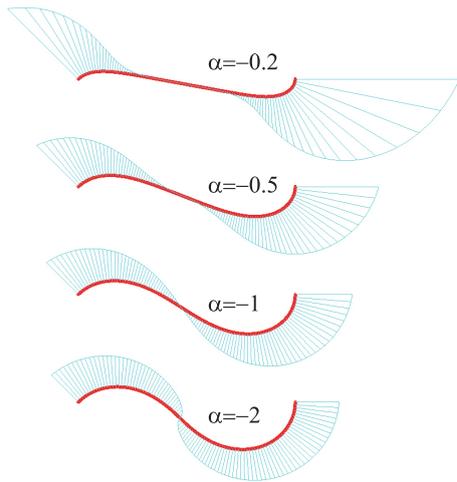


Fig. 3 S-shaped LA curves with different  $\alpha$  values

曲率  $\kappa(S) \geq 0$  であり,  $c_{10}, c_{20}, c_{30}$  がすべて 0 でないとして仮定すると方向角  $\phi(S)$  は次式で与えられる.

$$\phi(S) = \begin{cases} \frac{\alpha}{(\alpha-1)c_{10}}(c_{10}S + c_{11})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + c_{12} & 0 \leq S \leq S_1 \\ \frac{\alpha}{(\alpha-1)c_{20}}(c_{20}S + c_{21})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + c_{22} & S_1 < S \leq S_2 \\ \frac{\alpha}{(\alpha-1)c_{30}}(c_{30}S + c_{31})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + c_{32} & S_2 < S \leq 1 \end{cases} \quad (19)$$

$\kappa(S)$  が負の場合は, 式 (2) と同様に曲率を定義し, それに対応して方向角は式 (4), (6) と同様に与えられる.

### 3.2 セグメントの条件式

蘭らの手法<sup>10)</sup>と同様に, 曲線の始点を原点とし, 終点を  $x$  軸上に移動させる. 始点と終点での曲率をそれぞれ  $\kappa_s \geq 0, \kappa_e \geq 0$  とし, 方向角を  $\phi_s, \phi_e$  とする.  $\kappa_s < 0$ , あるいは  $\kappa_e < 0$  の場合は 2.1 節の議論にしたがって適宜式を変更する. これらの条件は以下のように表される.

$$\kappa_s h = (c_{11})^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (20)$$

$$\kappa_e h = (c_{30} + c_{31})^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (21)$$

$$\phi_s = \frac{\alpha}{(\alpha-1)c_{10}}(c_{11})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + c_{12} \quad (22)$$

$$\phi_e = \frac{\alpha}{(\alpha-1)c_{30}}(c_{30} + c_{31})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + c_{32} \quad (23)$$

任意の  $\alpha$  に対して式 (20), (21) は,  $c_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3, j = 0, 1, 2$ ) に関して線形式に変形できるが, 式 (22), (23) は  $\alpha \neq -1$  のとき非線形であることに注意する<sup>5)</sup>.

セグメント間で, 曲率と方向角を連続とする条件は以下となる.

$$(c_{10}S_1 + c_{11})^{-\frac{1}{\alpha}} = (c_{20}S_1 + c_{21})^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (24)$$

$$(c_{20}S_2 + c_{21})^{-\frac{1}{\alpha}} = (c_{30}S_2 + c_{31})^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (25)$$

$$\frac{\alpha}{(\alpha-1)c_{10}}(c_{10}S_1 + c_{11})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + c_{12} = \frac{\alpha}{(\alpha-1)c_{20}}(c_{20}S_1 + c_{21})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + c_{22} \quad (26)$$

$$\frac{\alpha}{(\alpha-1)c_{20}}(c_{20}S_2 + c_{21})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + c_{22} = \frac{\alpha}{(\alpha-1)c_{30}}(c_{30}S_2 + c_{31})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + c_{32} \quad (27)$$

する.

<sup>5)</sup> $\alpha = -1$  の場合は三連クロソイドとなり, 方向角を  $S$  の 2 次式で表し, それらの係数を  $c_{ij}$  とすることにより式は線形となる.

各セグメントの  $\alpha$  値を同一としたため, 式 (24) から式 (27) は以下のように簡単化できる.

$$c_{10}S_1 + c_{11} = c_{20}S_1 + c_{21} \quad (28)$$

$$c_{20}S_2 + c_{21} = c_{30}S_2 + c_{31} \quad (29)$$

$$\frac{1}{c_{10}}(c_{10}S_1 + c_{11})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + \frac{\alpha-1}{\alpha}c_{12} = \frac{1}{c_{20}}(c_{20}S_1 + c_{21})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + \frac{\alpha-1}{\alpha}c_{22} \quad (30)$$

$$\frac{1}{c_{20}}(c_{20}S_2 + c_{21})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + \frac{\alpha-1}{\alpha}c_{22} = \frac{1}{c_{30}}(c_{30}S_2 + c_{31})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + \frac{\alpha-1}{\alpha}c_{32} \quad (31)$$

$\alpha \neq -1$  のとき式 (30) と (31) は非線形である.

曲線の終点の座標を  $(r, 0)$  とすると, 以下の 2 式が成り立つ.

$$h \int_0^1 \cos \phi(S) dS = r \quad (32)$$

$$\int_0^1 \sin \phi(S) dS = 0 \quad (33)$$

これまでの定式化において, 変数は  $h, c_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3, j = 0, 1, 2$ ) であり, それらの個数は 10 である. また, 条件式は, 式 (20)~(23), および式 (28)~(33) であり, その個数は 10 であり, 両者は一致する. ただし, 三連クロソイドでない場合は, 式 (22) と (23), 式 (30) と (31) が非線形方程式となっている.

### 3.3 解法

まず, 曲線の全長  $h$  を推定し, 式 (33) の左辺を  $c_{30}$  のみで表し, 式 (33) を満足するように 2 分法により解を探索する. 得られた解を用いて式 (32) より  $h$  を求め, その値を用いて再度式 (33) より  $c_{30}$  を求める. この処理を繰り返すことで  $c_{30}$  の値を求める.

この過程において, 数値として与えられた  $c_{30}$  を用いて,  $c_{10}$  に関する非線形方程式を解くことでその値を求める. したがって, 以下の定式化では  $c_{30}$  は数値で与えられていると考える.

式 (20)~(23) より,

$$c_{11} = (\kappa_s h)^{-\alpha} \quad (34)$$

$$c_{31} = (\kappa_e h)^{-\alpha} - c_{30} \quad (35)$$

$$c_{12} = \phi_s - \frac{\alpha}{(\alpha-1)c_{10}}(c_{11})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} = \phi_s - \frac{\alpha}{(\alpha-1)c_{10}}(\kappa_s h)^{1-\alpha} \quad (36)$$

$$c_{32} = \phi_e - \frac{\alpha}{(\alpha-1)c_{30}}(c_{30} + c_{31})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} = \phi_e - \frac{\alpha}{(\alpha-1)c_{30}}(\kappa_e h)^{1-\alpha} \quad (37)$$

$c_{31}$  と  $c_{32}$  は  $c_{30}$  により定まり,  $c_{12}$  は  $c_{10}$  により定まる.

式 (28) と式 (29) より

$$\begin{bmatrix} S_1 & 1 \\ S_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{20} \\ c_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{10}S_1 + c_{11} \\ c_{30}S_2 + c_{31} \end{bmatrix} \quad (38)$$

したがって,  $c_{20}$  と  $c_{21}$  は次式で与えられる.

$$c_{20} = \frac{c_{10}S_1 + c_{11} - c_{30}S_2 - c_{31}}{S_1 - S_2} \quad (39)$$

$$c_{21} = \frac{S_1(c_{30}S_2 + c_{31}) - S_2(c_{10}S_1 + c_{11})}{S_1 - S_2} \quad (40)$$

次に式 (30) と (31) を用いて  $c_{22}$  を以下のように消去する.

$$\frac{1}{c_{10}}(c_{10}S_1 + c_{11})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + \frac{\alpha-1}{\alpha}c_{12} + \frac{1}{c_{20}}\{(c_{20}S_2 + c_{21})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - (c_{20}S_1 + c_{21})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\} - \frac{1}{c_{30}}(c_{30}S_2 + c_{31})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - \frac{\alpha-1}{\alpha}c_{32} = 0 \quad (41)$$

上式の左辺を  $f(c_{10})$  と定義する.  $c_{12}, c_{20}, c_{21}$  は  $c_{10}$  の関数であり, 式 (36), (39), および (40) より, 次式が得られる.

$$\frac{\partial c_{12}}{\partial c_{10}} = \frac{\alpha}{(\alpha-1)(c_{10})^2} c_{11}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \quad (42)$$

$$\frac{\partial c_{20}}{\partial c_{10}} = \frac{S_1}{S_1 - S_2} \quad (43)$$

$$\frac{\partial c_{21}}{\partial c_{10}} = -\frac{S_1 S_2}{S_1 - S_2} \quad (44)$$

したがって,  $\partial f(c_{10})/\partial c_{10}$  を数値的に計算できる (付録 A 参照). 微分が可能なので, 非線形方程式  $f(c_{10}) = 0$  の解法として Newton 法のような微分を必要とする方法が利用でき  $c_{10}$  の値を求める. ここで述べた解法では,  $\alpha \neq 0, 1$  を仮定しているが,  $\alpha = 0, 1$  の場合も同様に定式化できる.

### 3.4 初期値の推定

前節で述べた解法には,  $c_{10}$  と  $c_{30}$  の初期値が必要となる. これらの初期値を求めるために, まず曲線長  $S_1$  と  $S_2$  における曲率の値を推定し, それらを用いて  $c_{10}$  と  $c_{30}$  の初期値を算出する.

三連 LA 曲線の初期形状推定のために, ここでは 5 次 Bézier 曲線<sup>6</sup>を用いる. 端点の位置, そこでの接線方向, および曲率を指定しただけでは 5 次 Bézier 曲線は一意に決まらず, それらを満足したからといって  $c_{10}$  と  $c_{30}$  の初期値を算出するための曲線として適切であるとは限らない.

そこで, Miura らが定義した目的関数<sup>15)</sup> を曲線の全長  $h$  に依存しないように式 (45) のように修正を加え, それを最小化することで初期値推定に適した 5 次 Bézier 曲線を算出する.

$$J_{LAC} = \int_0^h \sqrt{1 + \alpha^2 \rho^{2\alpha-2} \rho_s^2} ds / h \quad (45)$$

図 4(a) に,  $\alpha = -0.5$  と指定し, 境界条件を指定するために入力に用いた 5 次 Bézier 曲線とその制御点を緑色で, 最適化後の 5 次 Bézier 曲線とその制御点を青色で示した. 最適化後の曲線を用いて  $c_{10}$  と  $c_{30}$  の初期値を求め, それらから求めた三連 LA 曲線を赤色で描画した. 三連 LA 曲線は単一の LA 曲線と異なり式 (45) を最小化しているわけではないが, 最適化した 5 次 Bézier 曲線と三連 LA 曲線の形状が類似していることに注意する.

この例では, 入力として与えられた Bézier 曲線から得られる  $c_{10}$  と  $c_{30}$  の初期値は不適切であり, 繰り返し計算の過程で曲線長が負となり計算が破綻する. 最適化を施した Bézier 曲線を初期値算出に用いた場合には計算が破綻することなく三連 LA 曲線を算出できる.

最適化は単に初期値の推定のためであり, 次のような簡易な手法で求めた. 図 4(b) に示したように両端点での接線ベクトルの長さ  $l_0, l_3$  と, 与えられた曲率を満たす第 3, および第 4 制御点の位置を決定するパラメータを  $l_1, l_2$  とし, それらを独立に曲線の全長  $h$  に対して  $0.05 \leq l_i/h \leq 0.5, i = 0, \dots, 3$  で  $l_i/h$  を 0.05 ずつ離散的に変化させ目的関数が最小となる値を算出することで求めた. 図 5 に最適化された 5 次 Bézier 曲線から計算

<sup>6</sup>曲線の両端点で独立に曲率を指定するためには最低 5 次が必要となる.

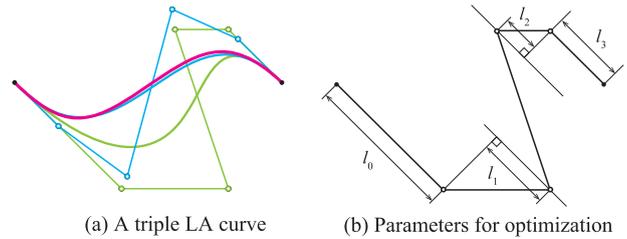


Fig. 4 Optimization of the approximation curve for initial values

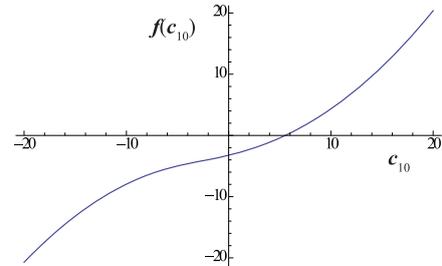


Fig. 5 Nonlinearity of function  $f(c_{10})$

された初期値に対する前節で定義した関数  $f(c_{10})$  を示す. 関数は非線形ではあるが,  $-20 \leq c_{10} \leq 20$  において  $f(c_{10}) = 0$  を満たす解が 1 つしか存在しないことを示している. 図 6 に三連 LA 曲線の曲率プロファイルを示す. この図からわかるようにセグメント間で曲率は連続となっているが, 両端点で指定した曲率が小さく曲線全体での曲率の単調性は満足されていない. 計算時間は, 最適化に約 30ms, パラメータの算出に約 20ms, 合計約 50ms 要した.

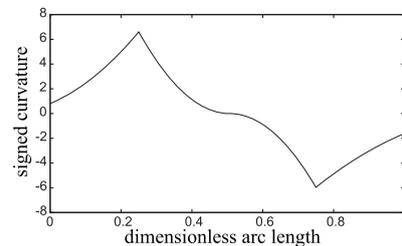


Fig. 6 Curvature profile of the triple LA curve shown in Fig.4(a)

図 7 に, 端点で異なる曲率を指定した場合の生成例を示す. 指定した曲率の大きさにより, (a) のように曲線全体で曲率が単調になる場合もあるが, (b), (c) のように一般に単調性は保証されない. 図 8 に, 異なる  $\alpha$  値を持つ曲線を曲率連続として繋いだ例を示す. この例が示すように, 我々の提案した手法では, 任意の  $\alpha$  に対しても接続点で同じ曲率を指定すれば  $G^2$  連続を保ちながら内挿可能である. ここで示した曲線例の生成時間は約 15~55ms であった.

図 9 に実際の CAD データに対して,  $G^2$  連続となるように曲線を置き換えた例を示す. (a) のような CAD 図面の前ドア上部に対して, (b) に示すように 3 本の曲線の曲率が不連続となっているが, (c) に示すように三連 LA 曲線により中央の曲線を置き換えることで  $G^2$  連続とした.

## 4. 結 論

本研究では, 対数型美的曲線の入力法について, Yoshida ら<sup>3)</sup> と牧野<sup>9)</sup> の方法について比較するとともに, それらの優劣につ

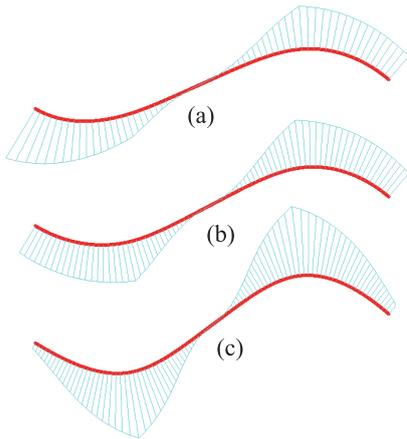


Fig. 7 Triple LA curves with different curvatures at the end points ( $\alpha = -0.5$ )

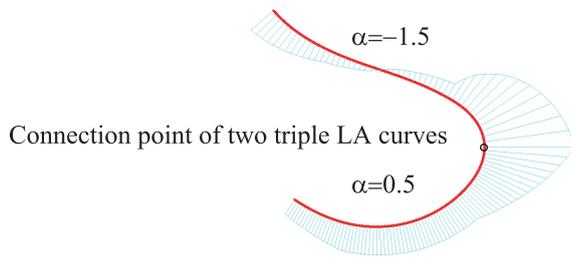


Fig. 8 A  $G^2$  Connection example of two triple LA curves

いて議論した。その議論に基づき、 $S$  字曲線の入力法を新たに提案した。さらに、LA 平面曲線セグメント 3 本を 1 組として用いる  $G^2$  エルミート内挿法を新たに提案した。本研究で提案したアルゴリズムは、市販 CAD システム (McNeel 社製「ライノセラ」) のプラグインとして実装しており、安定して動作している。今後、これらのアルゴリズムを空間曲線へ拡張する。

謝 辞

本研究の一部は、科学技術振興機構・研究成果最適展開支援事業 (A - STEP) フィージビリティスタディステージ・起業検証タイプの助成を受けて実施した。ここに謝意を表す。図 9 の CAD データは青島文化教材社よりご提供いただきました。また、プラグインの開発では、株式会社エムシースクウェア大野敏則様、北澤弘幸様にいろいろとお世話になりました。感

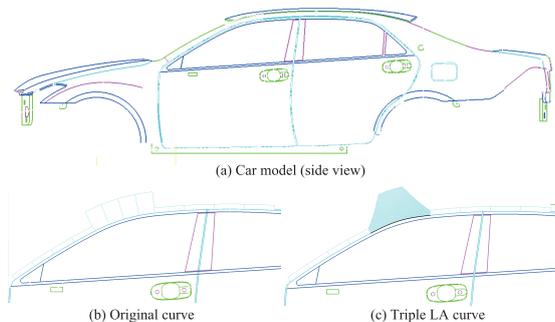


Fig. 9 Replacement by a triple LA curve for  $G^2$  continuity

謝いたします。

参 考 文 献

- 1) 三浦憲二郎, 藤澤誠, 美的曲線の 3 次元への拡張と B-spline 曲線による近似, グラフィックスと CAD/Visual Computing 合同シンポジウム 2006 予稿集, (2006), 227-232.
- 2) 三浦憲二郎, 美しい曲線の一般式とその自己アフィン性, 精密工学会誌 **72**, 7, (2006) 857-861.
- 3) N. Yoshida and T. Saito, Interactive Aesthetic Curve Segments, The Visual Computer (Pacific Graphics), **22**, 9-11, (2006), 896-905.
- 4) R.U. Gobithaasan and K.T. Miura, Aesthetic Spiral for Design, Sains Malaysiana, **40**, 11, (2011) 1301-1305.
- 5) R. Ziatdinov, N. Yoshida and T. Kim, Analytic Parametric Equations of Log-aesthetic Curves in Terms of Incomplete Gamma Functions, Computer Aided Geometric Design, **29**, 2, (2012) 129-140.
- 6) D.S. Meek, T. Saito, D.J. Walton and N. Yoshida, Planar two-point  $G^1$  Hermite interpolating log-aesthetic spirals, Journal of Computational and Applied Mathematics, **236**, 17, (2012) 4485-4493.
- 7) 三浦憲二郎, 八木麻里子, 川田洋平, 藤澤誠, 変曲点を端点とする美的曲線セグメントの入力と  $G^2$  連続性を保証する美的曲線の生成法, グラフィックスと CAD/Visual Computing 合同シンポジウム 2007 予稿集, (2007) 297-302.
- 8) 仇時雨, 牧野洋, 須田大春, 横山恭男, クロソイドによる自由曲線補間法, 日本ロボット学会誌, **8**, 1, (1990), 680-687.
- 9) 牧野洋, 接線法を用いた自由点列のクロソイド補間, 精密工学会誌, **60**, 1, (1994) 80-85.
- 10) 蘭豊礼, 玉井博文, 牧野洋, 三連クロソイドによる自由点列補間, 精密工学会誌, **76**, 10, (2010) 1194-1199.
- 11) 蘭豊礼, 玉井博文, 三浦憲二郎, 牧野洋, リニアな曲率・振率を持つセグメントによる軌道生成, 精密工学会誌, **78**, 7, (2012) 605-610.
- 12) 原田利宣, 森典彦, 杉山和雄, 曲線の物理的性質と自己アフィン性, デザイン学研究, **42**, 3, (1995) 33-40.
- 13) 高梨隆雄, 美的設計方法論, ダヴィッド社, 2002.
- 14) 上利真一, 三浦憲二郎, 藤澤誠, 西川知伸, 羽田隆志, 複合リズム対数型美的曲線の入力とその意匠デザインへの応用, 日本機械学会論文集, **75**, 756, (2009), 2159-2164.
- 15) K.T. Miura, R. Shirahata, S. Agari, S. Usuki, R.U. Gobithaasan, Variational Formulation of the Log-aesthetic Surface and Development of Discrete Surface Filters, Computer-Aided Design and Applications, **9**, 6, (2012) 901-914.

付録 A 第 2 セグメントについて

境界条件がある直線に対して線対称に与えられた場合、第 2 セグメントは直線、あるいは円弧になることが考えられる。変曲点と変曲点との間が直線となるのは例外的な場合であり、そのような曲線は変曲点と変曲点を線分でつなぐことが自然であり、以下では、第 2 セグメントが円弧となる場合を議論する。

第 2 セグメントが円弧になる場合、式 (18) において、 $c_{20} = 0$ ,  $c_{21} \neq 0$  が成り立つ。曲率に関するセグメント間の条件式は、

$$c_{10}S_1 + c_{11} = c_{21} \tag{46}$$

$$c_{21} = c_{30}S_2 + c_{31} \tag{47}$$

であり、この条件式は、式 (28), および (29) を満たしている。

したがって、関数  $f(c_{10})$  を式 (4) を用いて適宜変更すれば、 $f(c_{10}) = 0$  を満たす  $c_{10}$  を求めることにより曲線を求めることができる。ただし、曲率  $(c_{20}S + c_{21})^{-\frac{1}{\alpha}}$  は、

$$\lim_{c_{20} \rightarrow 0} (c_{20}S + c_{21})^{-\frac{1}{\alpha}} = c_{21}^{-\frac{1}{\alpha}} \tag{48}$$

と  $c_{21}^{-\frac{1}{\alpha}}$  に収束するが、 $\lim_{c_{20} \rightarrow 0} \left\{ \frac{\alpha}{(\alpha-1)c_{20}} (c_{20}S + c_{21})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + c_{22} \right\}$  は発散し、 $c_{21}^{-\frac{1}{\alpha}}S + c_{22}$  に収束しない。同様に、 $c_{20} = 0$  のとき  $\partial f(c_{10}) / \partial c_{10}$  は発散し、この式を用いることはできない。よって、Newton 法を用いることはできず、2 分法等の関数の微分を用いない方法を使用する。

$\alpha = -1$  (クロソイド曲線) の場合、方向角を  $S$  の 2 次式で表せば、直線、円弧を自然に含み、上記の問題の発生を抑えることができるが、 $\alpha = 0, 1$  の場合は同様の問題が発生する。