O36

極座標型美的曲線

静岡大学　○三浦憲二郎，臼杵深

The Polar-aesthetic Curve

Shizuoka University　Kenjiro T. MIURA, Shin USUKI

A new scissors was produced with newly designed cutting edges. The shape of their edges is a Bernoulli curve. The Bernoulli curve is the logarithmic spiral and a kind of the log-aesthetic curves. One of its properties is that the angle between its tangent vector and the radial axis from the origin is kept constant. This is the reason why the logarithmic spiral is also called the equiangular spiral. This also means that if two curves each other in the mirror position are rotated in different directions about the origin, the opening angle of the two curves is remained the same. Consequently if the cutting edges of a pair of scissors are given by a logarithmic spiral, the opening angle is constant. In this paper, we extend the logarithmic spiral to make the opening angle of a pair of scissors a linear function of the rotation angle of the cutting edges and newly define the polar-aesthetic curve and discuss about conditions for the monotonicity of its curvature.

1.　緒言

はさみの起源は非常に古く，紀元前 1000 年ごろの古代ギリシアのものとされるはさみが発見されている．しかしながら，現在でもはさみの改良は続けられており，2012 年に日本国内で発売されたはさみは，これまで使われていなかった曲線形状を刃に用いることにより，以下のような特徴を持っている [1].

- 根元から刃先まで切断に最適な刃の開き角度（約 30°）を常に保つゆるやかなカーブを持った “ベルヌーイカーブ刃” を新開発. **刃の角度が常に一定**なので刃の根元から刃先まで切る物をしっかりキャッチし, てこの原理を最大限に利用して 従来品比約 3 倍の切れ味の軽さを実現した.

2.　刃の角度が常に一定

前章で紹介したはさみにはベルヌーイ曲線 (Bernoulli curve[1]) が用いられており，これは対数型美的曲線 [2, 3, 4] の一種である対数らせんである．対数らせんは等角らせんとも呼ばれ，以下の性質を持つ.

- 中心から伸ばした半直線と対数らせんが成す角は一定であり，等角らせんの名はこの性質に由来している.

曲線の渦巻の方向が左巻きと仮定すると，上記の事実は，はさみに用いられている曲線を原点を中心として時計回りに回転させると x 軸と常に一定の角度で交わることを意味している．したがって，はさみの両方の刃にベルヌーイらせんを用いると常に 2 本の刃のなす角度は一定となる．以下では，逆に刃の角度が常に一定となる曲線を求める.

曲線を極座標を用いて定義し，曲線の弧長を s で表し，曲線上の点 $\boldsymbol{P}(s) = (r(s)\cos\theta(s), r(s)\sin\theta(s))$ とし，その点での曲線の方向角を ϕ とする．曲線の接線ベクトルを $\boldsymbol{t}(s)$ とすると,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{t}(s) &= \frac{d}{ds}(r\cos\theta, r\sin\theta)\\ &= (\frac{dr}{ds}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{ds}, \frac{dr}{ds}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{ds})\end{aligned} \quad (1)$$

したがって,

$$\tan\phi = \frac{\frac{dr}{ds}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{ds}}{\frac{dr}{ds}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{ds}} = \frac{\frac{dr}{ds}\tan\theta + r\frac{d\theta}{ds}}{\frac{dr}{ds} - r\tan\theta\frac{d\theta}{ds}} \quad (2)$$

[1] このベルヌーイは流体力学の祖とも言われるダニエル・ベルヌーイの父ヨハン・ベルヌーイの兄のヤコブ・ベルヌーイを指す.

$c = \phi - \theta$ と定義すると，$\phi = \theta + c$ であり,

$$\tan\phi = \frac{\tan\theta + \tan c}{1 - \tan\theta\tan c} \quad (3)$$

式 (2) を書き直すと,

$$\tan\theta = \frac{\tan\theta + \frac{r\frac{d\theta}{ds}}{\frac{dr}{ds}}}{1 - \tan\theta\frac{r\frac{d\theta}{ds}}{\frac{dr}{ds}}} \quad (4)$$

したがって，$\tan c = r\frac{d\theta}{ds}/\frac{dr}{ds}$. よって，$rd\theta/ds$ と dr/ds の比が一定であれば $\tan c$ が一定，すなわち c が一定となる．このとき，原点から曲線上の点までの直線と，方向ベクトルのなす角度が一定となる.

比例定数を k とし, $dr/ds = krd\theta/ds$ とおき, これを変数分離して解くことにより, $r = C\exp(k\theta)$ を得る．ここで, $C = \exp c_0$ である.

対数 (等角) らせんは複素数 i を用いて,

$$\boldsymbol{C}(t) = r(t)\exp(i\theta(t)) = C\exp(at)\exp(ibt) \quad (5)$$

と表せる．したがって $r(t) = C\exp(at)$, $\theta(t) = bt$ であり, $r = C\exp(\frac{a}{b}\theta)$ であり，c は一定となる.

3.　極座標型美的曲線 polar-aesthetic curve

これまでの議論に基づき, 極座標型美的曲線 polar-aesthetic(PA) 曲線を定義する．曲線 $\boldsymbol{C}(t) = r(t)\exp\{i\theta(t)\}$ と与える．方向角 ϕ と曲線上の点の原点からの方向角 θ の差を $\theta_0 = \phi - \theta$ とする．このとき，$\tan\theta_0 = r\frac{d\theta}{ds}/\frac{dr}{ds}$. ここで，$\theta_0$ を θ の関数とみなすと，曲線が満たすべき微分方程式は,

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\tan\theta_0} \quad (6)$$

この微分方程式を満たす曲線を極座標型美的曲線と呼ぶ.

3.1　θ_0 が θ の 1 次関数の場合

ここで, θ_0 を一次関数とし, ある定数 a, b に対して $\theta_0 = a\theta + b$, $(a \neq 0)$[2] と定義する．このとき，式 (6) は以下となる.

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\theta}{\tan(a\theta + b)} \quad (7)$$

[2] $a = 0$ の場合, 曲線は対数らせんとなる.

したがって，

$$\begin{aligned}\log r &= \frac{\log|\sin(a\theta+b)|+c_2}{a}\\ r^a &= C'|\sin(a\theta+b)| \end{aligned}\quad (8)$$

ここで，$C'=\exp c_2$ である．よって

$$r = C|\sin(a\theta+b)|^{\frac{1}{a}} \quad (9)$$

ここで，$C=C'^{\frac{1}{a}}$ である．

3.2　θ_0 が θ の任意関数の場合

θ_0 が θ の任意関数と仮定し，$\theta_0=f(\theta)$ とする．このとき，式 (6) は以下となる．

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\theta}{\tan(f(\theta))} \quad (10)$$

したがって，

$$\log r = \int \frac{d\theta}{\tan(f(\theta))} \quad (11)$$

ここで，$u=\sin(f(\theta))$ と置くと，$\sin^{-1}u=f(\theta)$ であり，すなわち $\theta=f^{-1}(\sin^{-1}u)$ であり，

$$\begin{aligned}du &= \cos(f(\theta))\frac{df(\theta)}{d\theta}d\theta\\ \cos(f(\theta))d\theta &= \frac{du}{\frac{df(\theta)}{d\theta}}\end{aligned} \quad (12)$$

したがって，式 (10) は次式となる．

$$\log r = \int\frac{\cos(f(\theta))}{\sin(f(\theta))}d\theta = \int\frac{du}{u\frac{df(\theta)}{d\theta}}$$

したがって，

$$r = C\exp(\int\frac{du}{u\frac{df(\theta)}{d\theta}}) \quad = C\exp(\int\frac{du}{u\frac{df(f^{-1}(\sin^{-1}u))}{d\theta}}) \quad (13)$$

ここで，C は積分定数により定まる定数である．

4.　曲率の単調性

ここでは，議論を簡単化するために θ_0 が θ の一次関数で与えられる場合を議論する．

s を曲線長 (弧長) とし，曲線 $\boldsymbol{C}(s)=r(s)\exp(i\theta(s))$ と定義する．この曲線の接線ベクトルは以下で与えられる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{t}(s) &= \frac{dr}{ds}\exp(i\theta(s))+ir\frac{d\theta}{ds}\exp(i\theta(s))\\ &= \frac{dr}{ds}\cos\theta - r\frac{d\theta}{ds}\sin\theta + i(\frac{dr}{ds}\sin\theta + r\frac{d\theta}{ds}\cos\theta)\end{aligned}$$

$|\boldsymbol{t}|=1$ より，

$$(\frac{dr}{ds}\cos\theta - r\frac{d\theta}{ds}\sin\theta)^2 + (\frac{dr}{ds}\sin\theta + r\frac{d\theta}{ds}\cos\theta)^2 = (\frac{dr}{ds})^2 + r^2(\frac{d\theta}{ds})^2 = 1 \quad (14)$$

曲率 $\kappa(t)$ は次式で与えられる．

$$\kappa(t) = \frac{2\dot{r}\dot{\theta}+r\dot{r}\ddot{\theta}-r\ddot{r}+r^2\dot{\theta}^3}{(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (15)$$

ここで，例えば $\dot{r}$ はパラメータ t による r の微分を表す．$\theta=t$ の場合，

$$\kappa(t) = \frac{r^2+2\dot{r}^2-r\ddot{r}}{(\dot{r}^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (16)$$

が得られる．

ここで，式 (9) において $C=1$ とし，$\sin(a\theta+b)\geq 0$ と仮定すると．

$$\kappa(t) = \frac{a+1}{\sqrt{\sin(at+b)^{\frac{2(1-a)}{a}}}} \quad (17)$$

したがって，$2(1-a)/a>0$ であれば，したがって，$0<a<1$ であれば，$\sin(at+b)$ が単調増加すれば曲率は単調減少し，$a<0$，または $a>1$ であれば，$\sin(at+b)$ が単調増加すれば曲率も単調増加する．$a=1$ の場合，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}(\theta) &= \sin(\theta+b)(\cos\theta,\sin\theta)\\ &= \frac{1}{2}(\sin(2\theta+b)+\sin b, -\cos(2\theta+b)+\cos b)\end{aligned}$$

となり，曲線は $((\sin b)/2,(\cos b)/2)$ を中心とする半径 1/2 の円弧となる．

図 **1** 上図に $\boldsymbol{C}_0(t)=\exp(a_0t+b_0)\exp(it)$ とその x 軸についての鏡像 (青) を，下図に $\boldsymbol{C}_1(t)=|\sin(a_1t+b_1)|^{\frac{1}{a_1}}\exp(it)$(緑) とその x 軸についての鏡像 (青) を，原点を中心に回転させた曲線とそれらの x 軸との交点での接線方向を示す．対数らせんではは さみ角が一定であるが，極座標型美的曲線では徐々にはさみ角が増加していることがわかる．

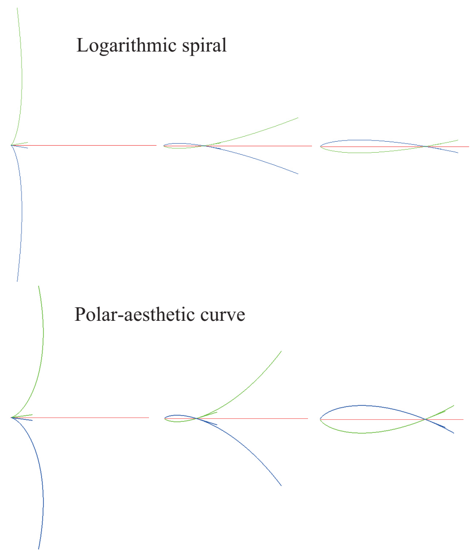

Fig. 1 対数らせん ($a_0=6.0$, $b_0=-10$) と極座標型美的曲線 ($a_1=0.2$, $b_1=\pi/24$)

5.　結言

本研究では，はさみのはさみ角に着目し，それが回転角の関数で与えられる曲線として極座標型美的曲線を提案した．特に，はさみ角が回転角の 1 次式として与えられる場合の曲率の単調増加性について議論した．今後，これを空間曲線へ拡張する．

謝辞

本研究は JSPS 科研費基盤研究 (B)25289021 の助成を受けたものである．ここに謝意を表する．

参　考　文　献

[1] http://www.plus.co.jp/news/111214.html
[2] 三浦憲二郎, 藤澤誠, 美的曲線の 3 次元への拡張と B-spline 曲線による近似, グラフィックスと CAD/Visual Computing 合同シンポジウム 2006 予稿集, (2006), 227-232.
[3] 三浦憲二郎，美しい曲線の一般式とその自己アフィン性, 精密工学会誌 **72**, 7, (2006) 857-861.
[4] N. Yoshida and T. Saito, Interactive Aesthetic Curve Segments, The Visual Computer (Pacific Graphics), **22**, 9-11, (2006), 896-905.