典型的曲線の非定常化とその曲面への拡張

三浦　憲二郎　白幡 良　上利　真一
静岡大学

典型的 (typical) な平面 Bézier 曲線は，次数 n を高くしていくと対数 (等角) らせんに収束することが知られている．対数らせんは対数型美的曲線の 1 つであり，それらの曲線は曲率対数グラフの傾き α を用いて定式化される．本研究では典型的な平面 Bézier 曲線の定義に用いる遷移行列を固定せず，制御ポリラインの各辺に依存するように非定常化することにより非定常典型的 Bézier 曲線を定義する．フルネー標構で定義された遷移行列の回転角とスケーリング係数との関係を指定することにより，次数 n を高くしていくとその曲線が任意の α と，空間曲線の場合はさらに任意の捩率対数グラフの傾き β とを持つ対数型美的曲線に収束する曲線の生成法を提案する．さらに，スケーリング係数を常に 1 に固定した曲面として，制御メッシュの各辺の長さを一定として定義される非定常典型的曲面を提案する．

Non-stationarization of the Typical Curves and its Extension to Surfaces

K.T. Miura, R. Shirahata, S. Agari
Shizuoka University

It is known that if the degree of the typical plane Bézier curve is incleased infinitely, the curve will converge to the logarithmic (equiangular) spiral. The logarithmic spiral is one of the log-aesthetic curves and they are formulated by α: the slope of the logarithmic curvature graph. In this paper we define the nonstationarily typical Bézier curve by making the transition matrix of the typical Bézier curve nonstationary and dependent on eacn side of the control polyline and defining the transition matrix in the Frenet frame. We propose a method that generates such a curve that it will converge to a log-aesthetic curve with arbitrary α, and β: the slope of the logarithmic torsion graph in case of space curves, by controling the relationship between the rotation angle and the scaling factor if its degree of the curve is incleased infinitely. Furthermore we extend the non-stationarization for free-form surfaces and propose the nonstationarily typical surface with the constant scaling factor 1.

1　緒言

吉田らは典型的 (typical) な平面 class A Bézier 曲線が次数 n を高くしていくと対数 (等角) らせんに近づくことを示した [14]. 対数らせんは対数型美的曲線の典型例であり，対数型美的曲線は曲率対数グラフの傾き α により定式化されるが，これまでの研究では，典型的な平面 class A Bézier 曲線と α 値との関係は明らかにされていない．

そこで，本研究では次数 n を高くしていくと任意の α 値を持つ美的曲線に収束する曲線を定義するために，典型的 Bézier 曲線の定義に用いる遷移行列の回転角，あるいはスケーリング係数を固定せず，制御ポリラインの各辺に依存するように非定常化することにより非定常典型的 Bézier 曲線を定義する．遷移行列のスケーリング係数を 1 と固定して回転角を制御する，あるいは回転角を一定としてスケーリング係数を制御して，次数を高くしていくと任意の α 値を持つ対数型美的曲線に収束する n 次 Bézier 曲線を提案する．この n 次 Bézier 曲線は，制御点を対数型美的曲線に収束させるように定義しており，この Bézier 曲線の制御点を m 次の B-spline 曲線と考えれば，その曲線も制御点の数を増加させ，したがってセグメント数を増加させていけば同じ対数型美的曲線に収束する．そこで，特に $m = 3$ の場合について，曲率が単調となる条件を明らかにする．

対数型美的空間曲線は曲率半径だけでなく捩率半径の累乗も曲線長 (弧長) の 1 次式で与えられる曲線であり，曲率対数グラフに対応する捩率対数グラフが傾き β の直線として与えられる [10]. 本研究ではフルネー標構 (動標構) において定義された遷移行列による非定常典型的 Bézier 曲線により，任意の α 値と β 値を持つ空間曲線の定義法を提案する．さらには，スケーリング係数を常に 1 に固定した曲面として，制御メッシュの各辺の長さを一定として定義される非定常典型的曲面を提案する．

2　関連研究

本章では関連研究として class A Bézier 曲線と対数型美的曲線について，特に後者に関しては美しい曲線の一般式とパラメータ表現について述べる．

2.1　Class A Bézier 曲線

Class A Bézier 曲線 [6] は，Farin によって提案された曲率および捩率の単調な曲線である．n 次 Bézier 曲線の制御点を $\boldsymbol{b}_i (0 \le i \le n)$, $\Delta \boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{b}_{j+1} - \boldsymbol{b}_j (0 \le j \le n-1)$ とする．ある遷移行列 M が与えられ，$\Delta \boldsymbol{b}_j = M^j \Delta \boldsymbol{b}_0$ が成り立つとする．$t \in [0,1]$ および $|\boldsymbol{v}| = 1$ である任意の $\boldsymbol{v}$ に関して，行列 M が次式を満足するとき，

$$|(1-t)\boldsymbol{v} + tM\boldsymbol{v}| \ge |\boldsymbol{v}| \tag{1}$$

制御点 $\boldsymbol{b}_i$ により生成される曲線は，曲率および捩率が単調となる class A Bézier 曲線となる．式 (1) は $|\boldsymbol{v}| = 1$ である $\boldsymbol{v}$ に対して，$\boldsymbol{v}$ と $M\boldsymbol{v}$ によって定義される線分が終点を除いて半径 1 の円と交差しないことを意味している．式 (1) を満足する行列 M は次の 2 つの条件を満たす．

1. $\boldsymbol{v}$ と $M\boldsymbol{v}$ のなす角は 90 度より小さくなければならない．
2. 行列 M は単位球上の任意の点をその球の外側に写像しなければならない．

条件 1. を満足するために，Farin は以下の 2 つの行列の固有値が非負であることを示した．

$$M^T + M - 2I, \quad M^T M - I \tag{2}$$

ここで，I は単位行列である．条件 2. を満足するには，M の特異値 σ_1, σ_2 $(\sigma_1 \ge \sigma_2)$ は 1 に等しいか，あるいはそれより大きくなければならない．曲率の単調性を証明するために，Cao と Wang は対称行列の σ_1，σ_2 に対して次の条件を与えた [3].

$$2\sigma_1 \ge \sigma_2 + 1, \quad 2\sigma_2 \ge \sigma_1 + 1 \tag{3}$$

したがって，対称行列 M が class A であるためには，式 (1) の行列は非負の固有値を持つとともに，M の特異値 σ_1, σ_2 は 1 に等しいか大きく，さらに式 (3) を満たさなければならない．これらの M に関する条件を class A 条件と呼ぶ．

Farin は class A 行列の 1 例として典型的な class A 行列を与えた．典型的な class A 行列により生成される Bézier 曲線は Higashi らの研究 [7] に基づく Mineur ら [11] の典型的 (typical)

な曲線に一致する．もし，遷移行列 M が角 $\theta < \pi/2$ の回転と係数 s のスケーリングで構成されており，不等式

$$\cos\theta > \frac{1}{s} \ (\text{if } s > 1) \quad \text{or} \quad \cos\theta > s \ (\text{if } s < 1) \tag{4}$$

を満たすならば行列 M は class A である．

2.2 対数型美的曲線

2.2.1 美しい曲線の一般式

曲線の曲線長を s，曲率半径を ρ とすると，曲率対数グラフの横軸は $\log\rho$，縦軸は $\log(ds/d(\log\rho)) = \log(\rho\, ds/d\rho)$ となる．曲率対数グラフが直線で与えられれば，ある定数 α が存在して，

$$\log(\rho\frac{ds}{d\rho}) = \alpha\log\rho + C \tag{5}$$

が成り立つ．ここで，C は定数である．この式を美しい曲線の基本方程式とよぶ．式 (5) を変形すると，

$$\frac{1}{\rho^{\alpha-1}}\frac{ds}{d\rho} = e^C = C_0 \tag{6}$$

したがって，ある定数 c_0 が存在して，

$$\rho^{\alpha-1}\frac{d\rho}{ds} = c_0 \tag{7}$$

上式より，$\alpha \neq 0$ であれば，美しい曲線の第 1 一般式

$$\rho^\alpha = c_0 s + c_1 \tag{8}$$

が得られ，$\alpha = 0$ の場合には，美しい曲線の第 2 一般式

$$\rho = c_0 e^{c_1 s} \tag{9}$$

が得られる [8].

2.2.2 美的曲線のパラメータ表現

曲線$\boldsymbol{C}$(s) が美しい曲線の第 1 一般式 (8) を満足すると仮定すると，

$$\rho(s) = (c_0 s + c_1)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{10}$$

が成り立つ．s が曲線長であることから，以下の 2 式を満たす $\theta(s)$ が存在して，

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\theta \tag{11}$$

したがって，$\rho(s) = 1/(d\theta/ds)$ であることから，

$$\frac{d\theta}{ds} = (c_0 s + c_1)^{-\frac{1}{\alpha}} \tag{12}$$

$\alpha \neq 1$ の場合は，

$$\theta = \frac{\alpha(c_0 s + c_1)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}{(\alpha-1)c_0} + c_2 \tag{13}$$

以上のことから，曲線は始点を $\boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{C}(0)$ とすると，

$$\boldsymbol{C}(s) = \boldsymbol{P}_0 + e^{ic_2}\int_0^s e^{i\frac{\alpha(c_0 s + c_1)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}{(\alpha-1)c_0}} ds \tag{14}$$

と与えられる．$\alpha = 0, 1$ の場合も同様の手順で定式化できる．

3 対数型美的平面曲線の近似

対数型美的曲線は積分形式で表され，曲線上の点を求めるためには，$\alpha = 1, 2$ の場合を除いて数値積分を行う必要がある．曲線のデザインでは，始点や終点の位置，そこでの接線方向を指定する方法が通常用いられており，それらの条件を満足する曲線を得るには，式 (8) の c や d などのパラメータを数値的に探索する必要がある．指定された位置を終点とするには，異なるパラメータ値に対する曲線の終点を繰り返し計算する必要がある [13, 1, 2]. 対数型美的曲線を Bézier 曲線や B-spline 曲線で近似することができれば数値積分を省略することができ，より高速にパラメータ値を探索することができる．

ここでは対数型美的平面曲線を Bézier 曲線で近似することを考える．曲率対数グラフの傾き $\alpha \neq 0, 1$ と限定し，対数型美的曲線のパラメータ表現 (14) において，原点を曲線の始点とし，そこでの接線方向を x 軸の正の方向に一致させる．相似形を区別して，式を以下のように単純化する．

$$\boldsymbol{C}(s) = \int_0^s e^{ias^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} ds \tag{15}$$

以上の単純化によって，積分区間を適切にとれば任意の $\alpha \neq 0, 1$ の対数型美的曲線を表現できることに注意する．

2.1 節で述べたように，典型的曲線の遷移行列 M は角度 θ の回転と係数 s のスケーリングで構成されている．遷移行列を各制御ポリラインに依存させる，すなわち非定常化させると，任意の Bézier 曲線の制御点を指定できることに注意する．曲線の生成を容易にするために，θ と s を同時に変化させるのではなく，θ を固定し制御ポリラインの隣接する辺が一定の角度をなすように接続し s をコントロールする．あるいは $s = 1$ で固定し制御ポリラインの辺の長さを一定として，それらのなす角度をコントロールする．以下ではこの 2 つの方法での美的曲線の近似法を提案する．

3.1 スケーリング係数 1 の場合

式 (15) の積分式を以下のように離散的に行う．

$$\boldsymbol{C}(s) \approx \sum_{j=0}^{n-1} e^{ia(j\Delta s)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}\Delta s \tag{16}$$

ここでは曲線の全長を $n\Delta s$ とした．原点を最初の制御点と考え，Δs を制御点間の距離と解釈すれば，上式は Δs づつ離れた制御点を順次 $n+1$ 個指定していると捉えることができる．

制御ポリラインの $j+1$ 番目の辺の方向角 (x 軸とのなす角度) は $a(j\Delta s)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$ であり，$(j+1)\Delta s$ と $(j+2)\Delta s$ での接線の方向角の差 $\Delta\theta_j$ は，

$$\Delta\theta_j = a\{(j+2)\Delta s\}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - a\{(j+1)\Delta s\}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \tag{17}$$

である．したがって，Δs を一定とすると，式 (16) はスケーリング率が 1 で回転角が $\Delta\theta_j$ で与えられる回転行列 $M_j = R_{\Delta\theta_j}$ による class A Bézier 曲線の表現形式に類似する．通常の class A Bézier 曲線では，行列 M_j は j に依存せず一定と考えているが，ここでの定式化では M_j は j に依存する．すなわち，n 次 Bézier 曲線の制御点を $\boldsymbol{b}_i (0 \le i \le n)$, $\Delta\boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{b}_{j+1} - \boldsymbol{b}_j (0 \le j \le n-1)$ とする．ある行列 M_j $(j = 0, \cdots, n-2)$ が与えられ，$\Delta\boldsymbol{b}_j = M_{j-1}\cdots M_0\Delta\boldsymbol{b}_0$ が成り立つ．したがって，この定義による曲線を非定常典型的 Bézier 曲線 (nonstationarily typical Bézier curve) と呼ぶ．曲線の終点は最後の制御点として与えられるため数値積分が不要であり，始点から終点までの接線ベクトルの回転角も $\{(n-1)\Delta s\}^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$ で与えられる．

式 (16) を用いて制御点の位置を決定することもできるが，Δs が微小量であると仮定すれば，回転角の比を簡潔に表現することができる．Δs が微小量であればテイラー展開して 1 次微分の項までとると，$\Delta\theta_j$ は次式で与えられる．

$$\Delta\theta_j = a\frac{\alpha-1}{\alpha}\{(j+1)\Delta s\}^{-\frac{1}{\alpha}}\Delta s \tag{18}$$

したがって，連続する 2 つの回転角の比 $\Delta\theta_{j+1}/\Delta\theta_j$ は，

$$\frac{\Delta\theta_{j+1}}{\Delta\theta_j} = (\frac{j+1}{j+2})^{\frac{1}{\alpha}} \tag{19}$$

で与えられる．

図 1 上にこれまでに述べた方法で定義した Bézier 曲線の例を示す．この曲線を生成するために用いた式 (16) の α 値は -0.5 である．曲線をパイプとして描画するとともに制御点を球で表示している．曲線の次数を 99, 49, 24, したがって制御点数を 100, 50, 25 と変化させた場合の曲率と曲率対数グラフを図 1 下に示す．制御点数が 100 の場合には，曲率対数グラフはほぼ直線で与えられ，その傾きも約 -0.54 となっており指定した値にほぼ等しい．次数を下げても曲率の単調性は保たれているが，曲率対数グラフは直線からはずれて行く．

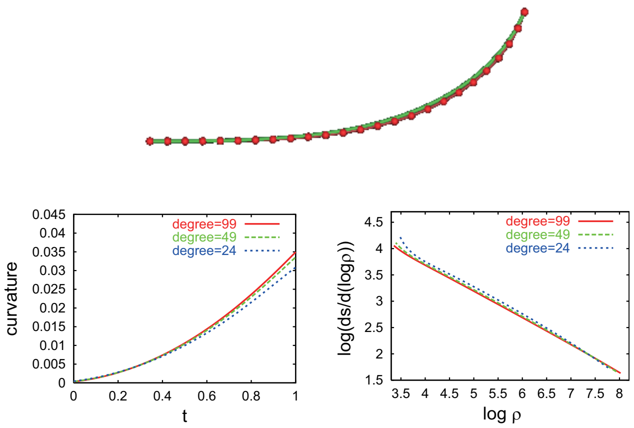

図 1: 上図:Bézier 曲線による美的平面曲線の近似例 (次数 24, $\alpha = -0.5$)，下図:次数の異なる曲線の曲率と曲率対数グラフの比較

式 (15) を単に精度よく数値積分するのであれば，台形公式やシンプソン公式等を用いるべきである．例えば，台形公式を適用するには，両端の辺を他の辺の半分にして制御点を生成すべきであるが，そのために曲率の単調性や曲率対数グラフの直線性が大きく損なわれる場合がある．3 次 B-spline 曲線の場合に限定するが，端点における制御ポリラインの辺の長さと曲率の関係について 3.4 節で述べる．

3.2 回転角一定の場合

式 (18) では距離の変化量 Δs を一定としたが，ここでは回転角 $\Delta\theta_j$ を j に依存せず $\Delta\theta$ で一定にする．すなわち，

$$\Delta\theta = a\frac{\alpha-1}{\alpha}\{(j+1)\Delta s_j\}^{-\frac{1}{\alpha}}\Delta s_j \tag{20}$$

したがって，

$$\Delta s_j = (j+1)^{\frac{1}{\alpha-1}}\{\frac{\alpha\,\Delta\theta}{a(\alpha-1)}\}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \tag{21}$$

で与えられる．この場合は Δs_j は j に依存し，スケーリング率が

$$\frac{\Delta s_{j+1}}{\Delta s_j} = (\frac{j+2}{j+1})^{\frac{1}{(\alpha-1)}} \tag{22}$$

で与えられ，回転角 $\Delta\theta$ が一定の行列 $M_j = s_j R_{\Delta\theta}$ による非定常典型的 Bézier 曲線となる．

3.3 適用例

この節ではこれまで述べた方法を対数らせんとクロソイド曲線に適用する．

3.3.1 対数らせん

対数らせんの一般式は方向角を定めるパラメータ t により以下のように定義できる．

$$\boldsymbol{C} = e^{(a+ib)t} \tag{23}$$

これを t で微分すると，

$$\frac{d\boldsymbol{C}}{dt} = (a+ib)e^{(a+ib)t} \tag{24}$$

ここで，角度の変化 $\Delta\theta = b\Delta t$ を一定にする．スケーリング率，すなわち距離の変化の比率 $\Delta s_{j+1}/\Delta s_j = e^{a(j+1)\Delta\theta/b}/e^{aj\Delta\theta/b}$ であり，これは $e^{a\Delta\theta/b}$ で一定となる．したがって，行列 M_j は j に依存せず，得られる曲線は定常的な行列による通常の class A Bézier 曲線である．これは吉田らの示した，典型的な平面 class A Bézier 曲線が次数 n を高くしていくと対数らせんに近づくという性質を表している．

3.3.2 クロソイド曲線

クロソイド曲線では $\alpha = -1$ であるので，距離の変化量が一定の場合，

$$\Delta\theta_j = a^2(j+1)\Delta s^2 \tag{25}$$

と与えられ，Δs が微小であれば回転角の比は，

$$\frac{\Delta\theta_{j+1}}{\Delta\theta_j} = (\frac{j+2}{j+1})^{\frac{1}{2}} \tag{26}$$

で与えられる．角度の変化量が一定の場合は，

$$\Delta s_j = (j+1)^{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2a}\Delta\theta)^{\frac{1}{2}} \tag{27}$$

であり，Δs_j が微小であればスケーリング率は，

$$\frac{\Delta s_{j+1}}{\Delta s_j} = (\frac{j+1}{j+2})^{\frac{1}{2}} \tag{28}$$

で与えられる．

3.4 B-spline 曲線による近似とその曲率の単調性

これまでの議論では Bézier 曲線の次数を上げていくと制御点が美的曲線に収束することを示したが，同じ制御点を用いて B-spline 曲線や NURBS 曲線を定義すると考えても，それらの曲線も制御点に収束し，したがって美的曲線に収束する．

そこで，この節では制御点により 3 次の一様 B-spline 曲線を定義する．とくに，制御点間の距離を一定に保った場合の曲率の単調性を保証する条件を述べる．図 2 上のように B-spline 曲線の 1 本のセグメント $\boldsymbol{C}_s(t)$ $(0 \le t \le 1)$ を定める連続する 4 個の制御点を $\boldsymbol{P}_i$, $\boldsymbol{P}_{i+1}$, $\boldsymbol{P}_{i+2}$ および $\boldsymbol{P}_{i+3}$ とする．曲率の単調性はスケーリングにより変化しないので，制御点間の距離を 1 に正規化し，2 つの角度 θ_0 と θ_1 により 4 個の制御点を位置を指定する．与えられた θ_0 (> 0) に対してどのような θ_1 が曲率の単調性を保証するかを調べる．制御点位置の対称性から $\theta_1 < \theta_0$ の範囲で単調性を調べれば十分である．

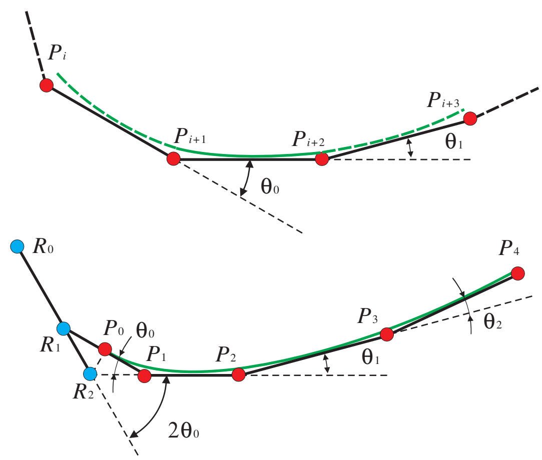

図 2: 角度 θ_0, θ_1 による制御点位置の指定

これら 4 個の制御点から定まる曲線セグメントの曲率を κ とすると，その変化率 $d\kappa/dt$ は付録 A.1 に示すように，以下の条件を満たすとき任意の $t \in [0,1]$ に対して常に負となる．

$$\sin(\theta_0 + \frac{\theta_1}{2}) - 3\sin\frac{\theta_1}{2} > 0 \tag{29}$$

したがって，この条件が曲率の単調性を保証する条件となっている．この式の左辺を 0 と等しいと仮定すると任意の θ_0 に対して

$$\theta_1 = 2\arccos\left(\frac{3-\cos\theta_0}{\sqrt{10-6\cos\theta_0}}\right) \tag{30}$$

と解くことができ，この θ_1 が単調性を保証する最大値となる．

実用上重要な B-spline 曲線は端点を通過するようにノット列の最初と最後のノットを多重化させた曲線であり，endpoint-interpolating B-spline 曲線と呼ばれている [5]．3 次曲線の場合は最初と最後のノットを 4 重とする．図 2 下に示すように，第 1 制御点 $\boldsymbol{P}_0$ と第 2 制御点 $\boldsymbol{P}_1$ との距離を $\cos\theta_0/3$，$\boldsymbol{P}_1$ と $\boldsymbol{P}_2$ との距離を 2/3 とする．図中 $\boldsymbol{R}_2$ は $\boldsymbol{P}_0$ を左へ 1/3 移動させた点であり，$\boldsymbol{R}_1$ は $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{R}_2$ と $\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_1$ のなす角度が θ_0 の 2 倍になるように定めている．$\boldsymbol{R}_0$ は $\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_1$ 上の点であり，$\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_0$ の長さを 1 としている．詳細は付録 A.2 で述べるが，このとき endpoint-interpolating B-spline 曲線の最初のセグメントは $\boldsymbol{R}_0$，$\boldsymbol{R}_2$，$\boldsymbol{P}_2$ および $\boldsymbol{P}_3$ を制御点として持つ一様 3 次 B-spline 曲線として表される．同様に第 2 セグメントは $\boldsymbol{R}_2$，$\boldsymbol{P}_2$，$\boldsymbol{P}_3$，および $\boldsymbol{Q}_3$ を制御点として持つ一様 3 次 B-spline 曲線として表される．第 3 セグメント以降はノットの多重化の影響を受けず一様 3 次 B-spline 曲線のセグメントとなっている．したがって, 各セグメントに対して適切な点を制御点として評価すれば式 (29) の条件がそのまま適用できる．各セグメントでの曲率の単調性が保証できれば曲線全体としての曲率の単調性も保証できる．

これまでに述べた対数型美的平面曲線の非定常典型的曲線による近似法は曲率の単調性を保証するわけではないが，生成された制御点に対する 3 次 B-spline 曲線においては端点を通過するようにノットを多重化させた場合を含めて，曲線全体に対する曲率の単調性を式 (29) を用いて検査することができ実用上有効と考えられる．

4　対数型美的空間曲線の近似

この章では対数型美的空間曲線を非定常典型的 Bézier 曲線で近似する方法を提案する．空間曲線は捩率が 0 でない曲線であり，曲率と同時に捩率を制御する必要がある．グローバル座標系だけでなく，フルネー標構のようなローカル座標系を用いても，遷移行列の回転軸と回転角を一定にしスケーリング係数のみを制御するだけでは, 1 方向の曲線の曲がり具合を調整できるだけであり，曲率と捩率を独立にコントロールすることはできない．そこで，スケーリング係数を 1 に固定し，回転軸と回転角を制御することを考える．一般的な class A Bézier 曲線の遷移行列がグローバル座標系で定義されているのに対して，ここで提案する手法はローカル座標系としてのフルネー標構を用いるのであり，非定常であるとともにローカル座標系を用いる点でも class A Bézier 曲線の構成法とは異なる．

空間曲線に対して，曲率対数グラフの傾き α を 0 でないと仮定し，さらに捩率対数グラフの傾き β も 0 でないと仮定する[1]．このとき，対数型美的空間曲線の一般式は平面曲線と類似した次式で与えられる．

$$\rho^\alpha = cs + d \tag{31}$$
$$\mu^\beta = gs + h \tag{32}$$

ρ は曲率半径，μ は捩率半径，s は曲線長を表す．$\alpha, \beta, c, d, g, h$ は定数であり，これらの値を変化させると曲線の形状も変化する．

曲線長 s の関数として与えられた空間曲線 $\boldsymbol{C}(s)$ に対して，単位接線ベクトルを $\boldsymbol{t}$，単位主法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$，単位従法線ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とする．これらのベクトルは次式で与えられるフルネー・セレーの公式により関係付けられる．

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}'(s) \\ \mathbf{n}'(s) \\ \mathbf{b}'(s) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}(s) \end{pmatrix} \tag{33}$$

ここで，κ は曲率であり τ は捩率である．$\boldsymbol{t}' = \kappa\boldsymbol{n}$ であり，曲率 κ は曲線長 s の変動にともなう $\boldsymbol{b}$ 回りの $\boldsymbol{t}$ の回転の割合を表す [12] と考えられる．同様に捩率 τ は $\boldsymbol{b}' = -\tau\boldsymbol{n}$ であり，$\boldsymbol{t}$ 回りの $\boldsymbol{n}$(または $\boldsymbol{b}$) の回転の割合を表すと考えられる．そこで，フルネー標構を用いて局所的に回転を定義することで遷移行列を定める．

平面曲線において式 (13) によって接線ベクトルの回転量 (方向角)θ が与えられたのと同様に，$\boldsymbol{tn}$ 平面における $\boldsymbol{t}$ の回転量 θ_κ，および $\boldsymbol{nb}$ 平面における $\boldsymbol{n}$(または $\boldsymbol{b}$) の回転量 θ_τ が次式で与えられると仮定する．

$$\theta_\kappa = \frac{\alpha(c_{\kappa 0}s + c_{\kappa 1})^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}{(\alpha-1)c_{\kappa 0}} + c_{\kappa 2} \tag{34}$$
$$\theta_\tau = \frac{\beta(c_{\tau 0}s + c_{\tau 1})^{\frac{\beta-1}{\beta}}}{(\beta-1)c_{\tau 0}} + c_{\tau 2} \tag{35}$$

ここで，θ_κ，θ_τ はそれぞれ $\boldsymbol{b}$ 回り，$\boldsymbol{t}$ 回りの回転量を表している．したがって，s が Δs だけ変化したときに生じる回転量の変化 $\Delta\theta_\kappa$ と $\Delta\theta_\tau$ を用いると単位接線ベクトル $\boldsymbol{t}$ はフルネー標構において，$\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ をそれぞれ x 軸，y 軸，z 軸に対応させると以下の回転行列を施されることになる．

$$R_\kappa(\Delta\theta_\kappa) = \begin{bmatrix} \cos\Delta\theta_\kappa & -\sin\Delta\theta_\kappa & 0 \\ \sin\Delta\theta_\kappa & \cos\Delta\theta_\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$R_\tau(\Delta\theta_\tau) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Delta\theta_\tau & -\sin\Delta\theta_\tau \\ 0 & \sin\Delta\theta\tau & \cos\Delta\theta_\tau \end{bmatrix} \tag{36}$$

隣接する制御点を求めるため，これら 2 つの回転行列の合成として遷移行列を定義するが，これらの回転行列は微小量 $\Delta\theta_\kappa$ と $\Delta\theta_\tau$ に対して交互に回転が施されるのであり，回転を施す順序に依存しないことが望ましい．そこで，Alexa により提案された変換の線形結合 [4] を用いる．このとき，2 つの行列 A と B の積 $A \otimes B$ は次式により定義される．

$$A \otimes B = \lim_{n\to\infty}(A^{\frac{1}{n}}B^{\frac{1}{n}})^n \tag{37}$$

これまでに述べた方法で作成した Bézier 曲線の例を図 3 に示す．この曲線を生成するために用いた式 (34), (35) の α 値と β 値はそれぞれ 1.5, 1.2 である．曲線をパイプとして描画するとともに制御点を球で表示し，空間曲線であることを示す目的で，x, y および z 軸を直線で描画している．

曲線の次数を 99, 49, 24 と変化させた場合の曲率と捩率，曲率対数グラフと捩率対数グラフを図 4 と図 5 に示す．次数が 99 の場合には曲率対数グラフ，捩率対数グラフともほぼ直線で与えられ，それらの傾きも約 1.46, 1.14 となっておりほぼ指定した値に等しい．次数を下げても曲率，捩率の単調性は保たれているが，2 つの対数グラフは直線からはずれて行く．特に，始点から 3 番目の制御点の指定では，制御点の最初の 3 点により始点での接触平面が定まり，捩率のための回転が無効となるため直線からのずれが大きい．次数の低い曲線についてもグラフの直線性を保つのが今後の課題である．

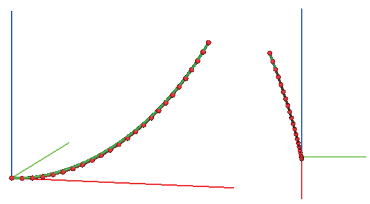

図 3: Bézier 曲線による美的空間曲線の近似例，次数 24，$\alpha = 1.5$，$\beta = 1.2$

5　非定常典型的曲面

これまでの曲線の構成法を曲面に拡張する．前章の空間曲線の議論より，回転軸と回転角を固定しスケーリング係数 s をコントロールするよりも，スケーリング係数を 1 に固定し回転軸と回転

[1] $\beta = 0$ の場合も捩率半径 μ は式 (9) と同様に s の指数関数として与えられる．

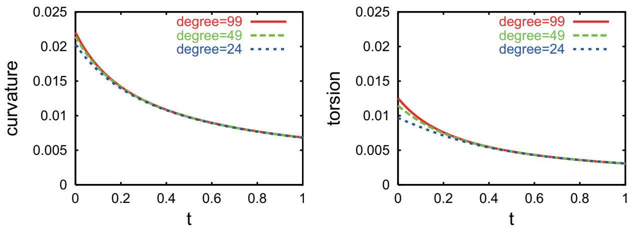

図 4: 次数の異なる曲線の曲率と捩率の比較

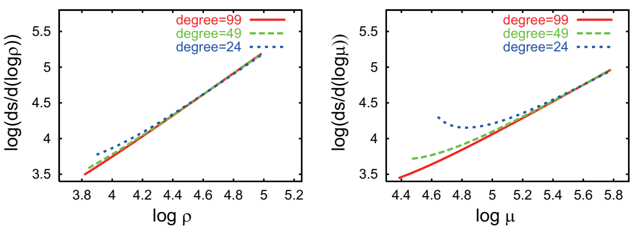

図 5: 次数の異なる曲線の曲率対数グラフと捩率対数グラフ

角を制御することが有効と考えられる．そこで，図 6 左上のように曲面に対してもパラメータ方向に隣接する制御点間の距離を固定し，各制御ポリゴンの対角軸回りの回転により制御点位置を順次決定する．図 6 左上では，ベクトル $\boldsymbol{P}_{i,j}\boldsymbol{P}_{i+1,j}$ と $\boldsymbol{P}_{i,j+1}\boldsymbol{P}_{i+1,j+1}$ の大きさを一致させ， ベクトル $\boldsymbol{P}_{i,j}\boldsymbol{P}_{i,j+1}$ と $\boldsymbol{P}_{i+1,j}\boldsymbol{P}_{i+1,j+1}$ の大きさを一致させる．$\boldsymbol{P}_{i,j}$, $\boldsymbol{P}_{i+1,j}$ および $\boldsymbol{P}_{i,j+1}$ の制御点が定まっていれば，$\boldsymbol{P}_{i+1,j+1}$ の位置の自由度は対角軸回りの回転のみとなり $\boldsymbol{P}_{i+1,j+1}$ を回転させ $\boldsymbol{R}_{i+1,j+1}$ に移動させる．曲線と同様に，この回転角をコントロールすることにより高品質な曲面を生成できる可能性がある．このように定義される曲面を曲線との類似性から非定常典型的曲面と呼ぶ．

非定常典型的曲面の生成例を図 6 右上に，そのガウス曲率，平均曲率をそれぞれ左下，右下に示す．この例では曲面の 2 つのパラメータ u, v 方向の制御点間距離を一致させ，$v = 0$ に対応する制御点 $\boldsymbol{P}_{i,0}$ を $\alpha = -0.5$ の美的平面曲線を近似するように生成させ，同様に $u = 0$ に対応する制御点 $\boldsymbol{P}_{0,j}$ を $\alpha = -0.6$ の美的平面曲線を近似するように生成させている．さらに，各制御ポリゴンをその対角軸回りに $0.01°$ づつ回転させている．制御点数は 25×25 個であり，これらの制御点を用いて双 24 次 Bézier パッチを生成している．

この章で示した曲面の例は簡単な回転角の制御しかおこなっておらず，どのように回転角をコントロールすべきか，また与えられた境界線に対してどのように曲面を生成するのか等は今後の課題である．

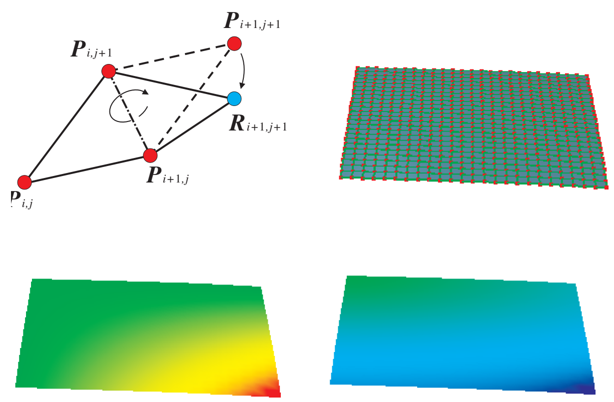

図 6: 制御ポリゴンの対角軸回りの回転による制御点位置の指定，非定常典型的曲面の例とそのガウス曲率および平均曲率

6　結言

本研究では，これまで不明であった典型的な平面 class A Bézier 曲線と α 値との関係を明らかにするとともに，遷移行列を非定常化することで，空間曲線を含めて対数型美的曲線を Bézier 曲線や B-spline 曲線として近似する方法を提案した．回転とスケーリングの合成として与えられる遷移行列は，平面曲線に対してはグローバル座標系に対してもフルネー標構のようなローカル座標系に対しても同一の行列として表現される．典型的 Bézier 曲線は class A Bézeir 曲線に含まれるが，class A Bézier 曲線の遷移行列がグローバル座標系で定義されるのに対して，ローカル座標系で定義された遷移行列を用いていると考えることもできる．しかしながら，空間曲線においてはそれらは明確に区別されるべきであり，曲率対数グラフとともに捩率対数グラフの直線性を保ちながら曲線を生成するにはローカル座標系であるフルネー標構での回転の定義が有効であることを示した．

曲面に対する遷移行列の非定常化に関しては本研究では基本的な枠組みを示したに過ぎず，今後の研究が不可欠である．

参考文献

[1] 上利真一, 川田洋平, 藤澤誠, 三浦憲二郎, “制御点入力による複合リズムを持つ美的曲線の生成,” 第 17 回設計工学・システム部門講演会, 2007.

[2] 上利真一, 藤澤誠, 三浦憲二郎, “制御点入力による対数型美的空間曲線の生成,” 2008 年度精密工学会春季大会学術講演会, 2008.

[3] Cao, J., Wang G., “A note on Class A Bezier curves,” Computer Aided Geometric Design, 2007.

[4] Alexa, M., “Linear combination of transformations,” SIGGRAPH’02: Proceedings of the 29th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, pp.380-387, 2002.

[5] Farin, G., Curves and Surfaces for CAGD, 5th Ed., Morgan Kaufmann, 2001.

[6] Farin, G., “Class a bézier curves,” Computer Aided GeometricDesign, Vol. 23, No. 7, pp. 573-581, 2006.

[7] Higashi, M., Kaneko, K., Hosaka, M., “Generation of high quality curve and surface with smoothly varying curvature,” Eurographics, 79-92, 1988.

[8] 三浦憲二郎, 美しい曲線の一般式, グラフィックスと CAD/Visual Computing 合同シンポジウム 2005 予稿集, pp.227-232, 2005.

[9] 三浦憲二郎，美しい曲線の一般式とその自己アフィン性, 精密工学会誌 Vol.72, No.7, pp.857-861, 2006.

[10] Kenjiro T. Miura, Makoto Fujisawa, Junji Sone and Kazuya G. Kobayashi, The Aesthetic Space Curve, Humans and Computers 2006, pp.101-106, 2006.

[11] Mineur, Y., “A shape controlled fitting method for Bezier curves,” Computer Aided Geometric Design, 15(9), 1998, 879-891.

[12] 山口富士夫，コンピュータディスプレイによる形状処理工学 [ ], 日刊工業新聞社，1982.

[13] N. Yoshida and T. Saito, “Interactive Aesthetic Curve Segments,” The Visual Computer (Pacific Graphics), Vol. 22, No.9-11, pp.896-905, 2006.

[14] 吉田典正，斎藤隆文，平岩智之，“曲率単調な曲線セグメントの対話的制御，” Visual Computing/グラフィクスと CAD 合同シンポジウム, pp.19-24, 2007.

A　3 次 B-spline 曲線の曲率の単調性

A.1　一様 B-spline 曲線

図 2 上に示した 4 個の制御点 $\boldsymbol{P}_{i+j}(j = 0, 1, 2, 3)$ により定まる 3 次 Bézier 曲線 $\boldsymbol{C}(t)$ の 4 個の制御点 $\boldsymbol{Q}_0$, $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{Q}_2$ および $\boldsymbol{Q}_3$

は次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Q}_0 &= \frac{\boldsymbol{P}_i + 4\boldsymbol{P}_{i+1} + \boldsymbol{P}_{i+2}}{6} \\
\boldsymbol{Q}_1 &= \frac{2\boldsymbol{P}_{i+1} + \boldsymbol{P}_{i+2}}{3} \\
\boldsymbol{Q}_2 &= \frac{\boldsymbol{P}_{i+1} + 2\boldsymbol{P}_{i+2}}{3} \\
\boldsymbol{Q}_3 &= \frac{\boldsymbol{P}_{i+1} + 4\boldsymbol{P}_{i+2} + \boldsymbol{P}_{i+3}}{6}
\end{aligned}
$$

ここで結果の数式の煩雑さを避ける目的で $\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2$ の長さを 1 にスケーリングする．このスケーリングにより曲率の単調性の条件は変化しないことに注意する．

曲線の曲率の単調性を調べるためには曲率の微分値の正負を調べればよい．3 次 Bézier 曲線の 1 次微分ベクトルの大きさの 2 乗を $g(t)$, そのベクトルと 2 次微分ベクトルの外積の z 座標を $f(t)$ とすると，曲線の曲率 $\kappa(t)$ は次式で与えられる．

$$
\kappa(t) = \frac{f(t)}{g(t)^{\frac{3}{2}}} \tag{38}
$$

したがって，曲率の変化量 $d\kappa(t)/dt$ は,

$$
\frac{d\kappa(t)}{dt} = \frac{\frac{df(t)}{dt}g(t) - \frac{2}{3}f(t)\frac{dg(t)}{dt}}{f(t)^{\frac{5}{2}}} \tag{39}
$$

で与えられる．曲率が単調増加，あるいは減少であることは上式の分子である $h(t)$

$$
h(t) = \frac{df(t)}{dt}g(t) - \frac{3}{2}f(t)\frac{dg(t)}{dt} \tag{40}
$$

の正負を調べればよい．$f(t)$ は 1 次微分ベクトルと 2 次微分ベクトルの関係から 2 次式，$g(t)$ は 4 次式なので $h(t)$ は 5 次式である．

$h(t)$ を Bézier 多項式とみなすと，その係数 $C_0, C_1, \cdots, C_5$ は次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \cos^3\frac{\theta_0}{2}\{\sin(\frac{\theta_0}{2}+\theta_1) - 3\sin\frac{\theta_0}{2}\} \\
C_1 &= -\frac{2}{5}\{2 - 4\cos\theta_0 + \cos\theta_1 + \cos(\theta_0+\theta_1)\}\sin\theta_0 \\
&\quad -\cos^3\frac{\theta_0}{2}\{3\sin\frac{\theta_0}{2} - \sin(\frac{\theta_0}{2}+\theta_1)\} \\
C_2 &= \frac{1}{40}\{-22\sin\theta_0 + 7\sin(2\theta_0) \\
&\quad -2\cos\frac{\theta_0}{2}(32\sin(\frac{\theta_0}{2}-\theta_1) + 14\sin(\frac{\theta_0}{2}+\theta_1) \\
&\quad -6\sin(\frac{3\theta_0}{2}+\theta_1) + \sin(\frac{\theta_0}{2}+2\theta_1) + \sin(\frac{3\theta_0}{2}+2\theta_1))\} \\
C_3 &= -\frac{1}{40}\{-22\sin\theta_1 + 7\sin(2\theta_1) \\
&\quad -2\cos\frac{\theta_1}{2}(-32\sin(\theta_0-\frac{\theta_1}{2}) + 14\sin(\theta_0+\frac{\theta_1}{2}) \\
&\quad -6\sin(\theta_0+\frac{3\theta_1}{2}) + \sin(2\theta_0+\frac{\theta_1}{2}) + \sin(\theta_0+\frac{3\theta_1}{2}))\} \\
C_4 &= \frac{2}{5}\{2 + \cos\theta_0 - 4\cos\theta_1 + \cos(\theta_0+\theta_1)\}\sin\theta_1 \\
&\quad +\cos^3\frac{\theta_1}{2}\{3\sin\frac{\theta_1}{2} - \sin(\theta_0+\frac{\theta_1}{2})\} \\
C_5 &= -\cos^3\frac{\theta_1}{2}\{\sin(\theta_0+\frac{\theta_1}{2}) - 3\sin\frac{\theta_1}{2}\}
\end{aligned}
$$

これらの係数がすべて正，あるいは負であれば曲率の変化は厳密に単調となる．

式 (29) は C_5 が負となる条件である．$0 \le \theta_0, \theta_0 \le \pi/2$ に対して式 (29) の左辺の値を描いたグラフが図 7 左である．このグラフでは値が正になる領域を描画し，曲率の単調性が保証されない領域をフラットに描画している．図 7 の右図は左図とは反対に式 (29) の左辺の値が負になる領域を描画し，それ以外の領域をフラットに描画している．さらに，C_4 の値が負である領域を描画し，正となる領域をフラットに描画している．この図からわかるように 2 つのフラットな領域は交わらず，式 (29) の左辺の値が正になる領域では C_4 の値は負となる．$C_i(i = 0, \cdots, 3)$ について同様のグラフが描け，$C_i(i = 0, \cdots, 4)$ は $C_5 < 0$ であれば $C_i < 0$ を満たしている．したがって，$C_5 < 0$ の条件が $h(t)$ が常に負であるための条件となる．

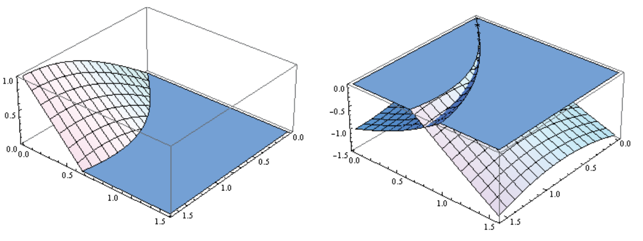

図 7: 条件式 (29) の左辺の値と C_4 の比較

A.2 Endpoint-interpolating B-spline 曲線

図 2 下のように endpoint-interpolating B-spline 曲線の制御点を $\boldsymbol{P}_i$ とし，曲線の始点からスタートする第 1 セグメントを 3 次 Bézier 曲線で表すとその制御点は,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Q}_0^0 &= \boldsymbol{P}_0 \\
\boldsymbol{Q}_1^0 &= \boldsymbol{P}_1 \\
\boldsymbol{Q}_2^0 &= \frac{\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2}{2} \\
\boldsymbol{Q}_3^0 &= \frac{3\boldsymbol{P}_1 + 7\boldsymbol{P}_2 + 2\boldsymbol{P}_3}{12}
\end{aligned}
$$

と表される．同様に第 2 セグメントの制御点は,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Q}_0^1 &= \frac{3\boldsymbol{P}_1 + 7\boldsymbol{P}_2 + 2\boldsymbol{P}_3}{12} \\
\boldsymbol{Q}_1^1 &= \frac{2\boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{P}_3}{3} \\
\boldsymbol{Q}_2^1 &= \frac{\boldsymbol{P}_2 + 2\boldsymbol{P}_3}{3} \\
\boldsymbol{Q}_3^1 &= \frac{\boldsymbol{P}_2 + 4\boldsymbol{P}_3 + \boldsymbol{P}_4}{6}
\end{aligned}
$$

と表される．第 1 セグメントの終点 $\boldsymbol{Q}_3^0$ と第 2 セグメントの始点 $\boldsymbol{Q}_0^1$ が一致していることに注意する．

第 2 セグメントの Bézier 曲線の制御点は $\boldsymbol{Q}_0^1$ のみが一様 B-spline 曲線のセグメントと異なっており，第 2 セグメントを一様 B-spline 曲線のセグメントとして表すには,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}'_1 &= \boldsymbol{P}_1 + \frac{\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_2}{2} \\
&= \frac{3\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_2}{2}
\end{aligned}
$$

とすればよい．$\boldsymbol{P}'_1$ は図 2 下の $\boldsymbol{R}_2$ に対応する．

次に，第 1 セグメントに対応する一様 B-spline 曲線セグメントの制御点を求める．一様 B-spline 曲線のセグメントに対応する Bézier 曲線の第 1 制御点は以下で表される．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Q}_0 &= \frac{\boldsymbol{P}'_0 + 4\boldsymbol{P}'_1 + \boldsymbol{P}'_2}{6} \\
&= \frac{1}{2}(\frac{\boldsymbol{P}'_0 + 2\boldsymbol{P}'_1}{3} + \frac{2\boldsymbol{P}'_1 + \boldsymbol{P}'_2}{3})
\end{aligned}
$$

であり，$\boldsymbol{Q}_0$ は $\boldsymbol{P}'_0\boldsymbol{P}'_1$ の 2 : 1 の内分点と $\boldsymbol{P}'_1\boldsymbol{P}'_2$ の 1 : 2 の内分点の中点となっている．第 2 セグメントを表す Bézier 曲線の制御点として用いた $\boldsymbol{P}'_1$ をそのまま利用し，$\boldsymbol{P}'_2, \boldsymbol{P}'_3$ をそれぞれ $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$ と一致させる．図 2 下の $\boldsymbol{R}_0$ は $\boldsymbol{P}'_0$ に対応するように決定している．ここで，三角形 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2$ が $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{R}_1$ を底辺とする二等辺三角形であることに注意すると，第 1 セグメントの評価に使用すべき回転角の大きさは θ_0 ではなく $2\theta_0$ である．