

# 対数型美的平面曲線のオフセット

静岡大学 ○三浦憲二郎, 澁谷大, 白杵深

Offsets of the Log-aesthetic Plane Curve

Shizuoka University Kenjiro T. MIURA, Dai SHIBUYA, Shin USUKI

The log-aesthetic curves include the logarithmic (equiangular) spiral, clothoid, and involute curves. Although most of them are expressed only by an integral form of the tangent vector, it is possible to interactively generate and deform them and they are expected to be utilized for practical use of industrial and graphical design. In this paper we discuss about offsets of the LA plane curve.

## 1. 緒言

ダイキャスト製品などの製造に用いられる金型には、意匠デザインの要求を満たすために自由曲面形状を含む複雑な形状を持つものが多い。このような金型のほとんどは、ボールエンドミルを用いた、3軸、あるいは5軸制御のNC切削加工により製作される。NC加工では、参照点と呼ばれる切削工具の位置を代表する点の移動経路を用いて、形状を切削する。ボールエンドミルの場合、一般的に工具先端の半球形の切の中心点を参照点として用いる。したがって、ボールエンドミルの参照点の軌跡は対象形状を外側にオフセットさせた面上に存在する。ワークからの2次元図形の削り出しを考えると、工具軌跡は輪郭形状のオフセット曲線そのものとなる。本研究では、対数型美的(LA)平面曲線のオフセット曲線について考察する。

## 2. オフセット曲線

平面曲線  $C(t)$  のオフセット曲線  $F(t)$  は次式で与えられる。

$$F(t) = C(t) + r\mathbf{n}(t) \quad (1)$$

ここで、 $r$  はオフセット距離であり、 $\mathbf{n}(t)$  は法線ベクトルである。オフセット曲線に対して元の曲線  $C(t)$  は母線(generator)と呼ばれる。

### 2.1 対数型美的平面曲線

方向角  $\theta$  をパラメータとする、対数型美的平面曲線の曲率  $\rho$  は次式で与えられる。

$$\rho(\theta) = \begin{cases} e^{\lambda\theta} & \alpha = 1 \\ ((\alpha - 1)\lambda\theta + 1)^{\frac{1}{\alpha-1}}, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

したがって、複素平面上で表される対数型美的曲線  $L_{AC}(\theta)$  は次式で定義される。虚数単位を  $i$  とすると、

$$L_{AC}(\psi) = \int_0^\psi \rho(\theta) e^{i\theta} d\theta \quad (3)$$

### 2.2 対数型美的曲線のオフセット

オフセット曲線の曲線長は一般的に母線の曲線長と異なるためここでは、方向角  $\theta$  による定式化を行う。式(3)で定義される対数型美的曲線の法線ベクトルは  $ie^{i\psi}$  と表せることから、式(1)より、そのオフセット曲線は、次式で表される。

$$\begin{aligned} F_{LA}(\psi) &= L_{AC}(\psi) + ire^{i\psi} \\ &= L_{AC}(\psi) - r \int_0^\psi e^{i\theta} d\theta + ir \\ &= \int_0^\psi \{((\alpha - 1)\lambda\theta + 1)^{\frac{1}{\alpha-1}} - r\} e^{i\theta} d\theta + ir \quad (4) \end{aligned}$$

上式において、末尾の項である  $ir$  は曲線を原点から虚軸の正方向に  $r$  だけ平行移動させること意味している。曲線の標準形として、原点を始点とするならばこの項は不要となる。 $((\alpha - 1)\lambda\theta + 1)^{\frac{1}{\alpha-1}} = r$  のとき、オフセット曲線は縮閉線と交差する。交差位置において、オフセット曲線の接線ベクトルの大きさは0となり、曲線は縮退する。式(4)で表された曲線は、曲線長をパラメータとする曲率半径シフト GLAC[3] を方向角でパラメータ化した曲線となっている。オフセットに必要なベクトルが解析的に表現できており、LA曲線は、 $1/(\alpha - 1) = \gamma$  ( $\alpha = 2, 3/2, 4/3, \dots, (\gamma + 1)/\gamma$ )、ここで、 $\gamma \in \mathbf{N}$  (0を含まない自然数) のとき、数値積分を必要とせずに解析的に表現できることが知られており [2]、したがって、そのオフセットも解析的に表現できる。

式(4)は曲率半径  $\rho(\theta)$  の積分形式であり、 $d\theta/ds = 1/\rho(\theta)$ 、したがって  $ds/d\theta = \rho(\theta)$  なので曲線長  $s(\psi)$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} s(\psi) &= \int_0^\psi \{((\alpha - 1)\lambda\theta + 1)^{\frac{1}{\alpha-1}} - r\} d\theta \\ &= \frac{\alpha - 1}{\alpha} \left[ \frac{1}{(\alpha - 1)\lambda} \{((\alpha - 1)\lambda\psi + 1)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - 1\} - r\psi \right] \quad (5) \end{aligned}$$

### 2.3 対数型美的曲線の縮閉線

与えられた曲線の縮閉線は曲率半径の中心の軌跡である。平面曲線  $C(t)$  の縮閉線  $E(t)$  は次式で与えられる。

$$E(t) = C(t) + \rho(t)\mathbf{n}(t) \quad (6)$$

ここで、 $\rho(t)$  は曲率半径であり、 $\mathbf{n}(t)$  は法線ベクトルである。縮閉線上でオフセット曲線はカusp(尖点)を形成する [1]。

式(3)で定義される対数型美的曲線の縮閉線は次式で与えられる。

$$E_{LA}(\psi) = L_{AC}(\psi) + i\rho(\psi)e^{i\psi} \quad (7)$$

式(7)は以下のように書き直せる。

$$E_{LA}(\psi) = i\lambda \int_0^\psi ((\alpha - 1)\lambda\theta + 1)^{\frac{1}{2-\alpha}-1} e^{i\theta} d\theta + ir \quad (8)$$

上式において、末尾の項である  $ir$  は曲線を原点から虚軸の正方向に、そこでの曲率半径である1だけ平行移動させること意味している。曲率対数グラフの傾き  $\alpha$  を持つLA曲線の縮閉線は傾き  $1/(2 - \alpha)$  を持つLA曲線で表されることが知られており、上式はそのことを示している。ここで、 $\alpha = (\gamma + 1)/\gamma$  とおく

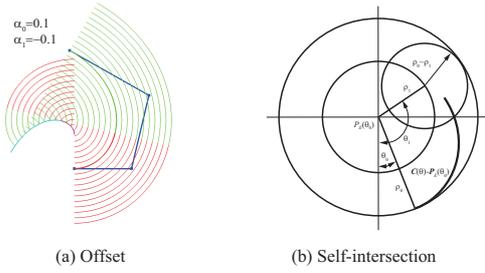


Fig. 1 Offset of a compound-rhythm LA curve, self-intersection

と、 $1/(2-\alpha) = \gamma/(\gamma-1)$  となり、元の LA 曲線が解析的に表現できる場合はその縮閉線も解析的に表現できる。

図 1(a) に複合リズム対数型美的曲線とその縮閉線、およびオフセットを示す。母線は 2 本の LA 曲線セグメントからなり、第 1 セグメント (赤色の太線) の  $\alpha$  値は 0.1, 第 2 セグメント (緑色太線) は  $-0.1$  である。第 1 セグメントの縮閉線をシアン太線で示し、その様々なオフセット距離によるオフセットを赤色細線で、第 2 セグメントのそれらをマゼンタ太線、および緑色細線で示した。この図より、オフセット曲線が縮閉線上で尖点となっていることがわかる。

### 3. 自己交差

曲線が自分自身と交差する自己交差は、曲線のオフセットで問題となることが指摘されている。例えば、輪郭形状の加工においては、本来加工を意図しない領域に工具の切刃があたり意図しない加工となってしまう。対数型美的曲線の曲率半径は単調に増加、または減少する性質があり、次の定理から自己交差しない。この定理では、曲率の単調増加性のみを仮定しており、複数の対数型美的曲線セグメントから構成させる曲線、例えば複合リズム対数型美的曲線においても自己交差しない。

**定理 1** 曲率が単調増加、あるいは単調減少する曲線は自己交差しない。

ここで、もし曲線の曲率が単調増加、あるいは単調減少すれば、方向角  $\theta$  は単調に変化するため、曲線を  $\theta$  でパラメータ化することができることに注意する。定理 1 を証明するまえに、証明手順の概略を示すために次の定理をまず証明する。

**定理 2** 曲率半径が方向角  $\theta$  に対して、線形に単調増加、あるいは単調減少する曲線は自己交差しない。

この定理の曲線の  $\alpha$  値は 2 であり、円インボリュート曲線である。

#### 定理 2 の証明

ここでは、曲率半径が方向角  $\theta$  に対して線形に減少する場合を扱う。曲率半径の増加・減少は曲線の向きに依存し、曲率半径が線形に増加する場合は、曲線の向きを反転させれば同様に議論が成り立つ。

曲線は以下のように定義できる。

$$\begin{aligned} C(\theta_1) &= P_0(\theta_0) + \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho(\theta) e^{i\theta} d\theta \\ &= P_0(\theta_0) + \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left( \rho_0 \frac{\theta - \theta_1}{\theta_0 - \theta_1} + \rho_1 \frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0} \right) e^{i\theta} d\theta \quad (9) \end{aligned}$$

ここで、 $P_0$  は始点であり、 $\rho_0 = \rho(\theta_0)$ ,  $\rho_1 = \rho(\theta_1)$ , および曲率半径は線形に減少するので  $\rho_0 > \rho_1$  が成り立つ。

$\theta = \theta_0$  のとき、曲線の縮閉線上の点  $P_E(\theta_0)$  は次式で与えられる。

$$P_E(\theta_0) = P_0(\theta_0) + i\rho_0 e^{i\theta_0} \quad (10)$$

$\theta_1 > \theta_0$  である曲線上の任意の点  $P(\theta_1)$  が、その中心を  $P_E(\theta_0)$  とし、半径  $\rho_0$  である円の厳密に中に存在することを証明する。これは、 $P(\theta_0)$  と  $P(\theta_1)$  は異なる位置にあり、曲線が自己交差しないことを意味する。

$P_E(\theta_0)$  に対する  $C(\theta_1)$  の位置ベクトルは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} C(\theta_1) - P_E(\theta_0) &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left( \rho_0 \frac{\theta - \theta_1}{\theta_0 - \theta_1} + \rho_1 \frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0} \right) e^{i\theta} d\theta - i\rho_0 e^{i\theta_0} \\ &= -i\rho_1 e^{i\theta_1} + \frac{\rho_1 - \rho_0}{\theta_1 - \theta_0} (e^{i\theta_1} - e^{i\theta_0}) \quad (11) \end{aligned}$$

$(e^{i\theta_1} - e^{i\theta_0})/(\theta_1 - \theta_0)$  は  $e^{i\theta_0} (e^{i(\theta_1 - \theta_0)} - 1)/(\theta_1 - \theta_0)$  と書き直すことができる。 $(e^{i\theta} - 1)/\theta = \text{sinc}(\theta/2)/\theta/2$  であり、関数  $\text{sinc } x/x$  は sinc 関数と呼ばれ、次式で表される。

$$\text{sinc}(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2k}\right) \quad (12)$$

したがって、 $|\text{sinc}(x)| \leq 1$ 。よって、 $\theta_1 > \theta_0$  のとき、 $(e^{i\theta_1} - e^{i\theta_0})/(\theta_1 - \theta_0)$  のノルムは 1 より小さい。図 1(b) に示すように、 $P_E(\theta_0)$  を中心とし、半径  $\rho_0$  を持つ円の厳密に中に  $P(\theta_1)$  は存在する

#### 定理 1 の証明

$P_E(\theta_0)$  に対する  $C(\theta_1)$  の位置ベクトルは、

$$\begin{aligned} C(\theta_1) - P_E(\theta_0) &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho(\theta) e^{i\theta} d\theta - i\rho_0 e^{i\theta_0} \\ &= -i\rho_1 e^{i\theta_1} + \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d\rho}{d\theta} e^{i\theta} d\theta \quad (13) \end{aligned}$$

したがって、上式の第 2 項のノルムが  $\rho_0 - \rho_1$  より小さければ定理は証明される。

第 2 項のノルムは、

$$\begin{aligned} \left| \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d\rho}{d\theta} \exp^{i\theta} d\theta \right| &\leq \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left| \frac{d\rho}{d\theta} \exp^{i\theta} \right| d\theta \\ &\leq \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| d\theta \\ &= \rho_0 - \rho_1 \quad (14) \end{aligned}$$

等号が成り立つのは  $\theta_1 = \theta_0$  のときのみであり、したがって定理 1 が証明された。

### 4. 結言

本研究では、対数型美的曲線のオフセットについて議論し、それが方向角でパラメータ化した一般化対数型美的曲線であることを示した。さらに、LA 曲線を含む曲率が単調増加、あるいは単調減少する曲線は自己交差しないことを証明した。

#### 謝辞

本研究の一部は、科学技術振興機構・研究成果最適展開支援事業 (A-STEP) フィージビリティスタディステージ・起業検証タイプの助成を受けて実施した。ここに謝意を表す。

#### 参考文献

- [1] R.T. Farouki and C.A. Neff. Analytic properties of plane offset curves. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 7, No. 1-4, pp. 83-99, 1990.
- [2] Rushan Ziatdinov, Norimasa Yoshida, and Tae wan Kim. Analytic parametric equations of log-aesthetic curves in terms of incomplete gamma functions. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 29, No. 2, pp. 129-140, 2012.
- [3] 三浦憲二郎, R.U. Gobithaasan. 一般化対数型美的曲線 : glac. グラフィックスと CAD/Visual Computing 合同シンポジウム, 2009.