

# 美しい曲線・曲面の定式化へ向けて

三浦憲二郎\*\* 吉田典正\*\*\*

Toward the Formulations of Aesthetic Curves and Surfaces

Kenjiro T. MIURA and Norimasa YOSHIDA

**Key words:** aesthetic curve, aesthetic surface, radius of curvature, fundamental equation of aesthetic curves

## 1. 序 論

意匠設計を行うデザイナーにとって、曲線は製品や作品のシルエットや形状を決定するもっとも基本的なデザイン要素であり、それを美しく魅力的にすることは意匠設計の質を高めるために必要不可欠である。美しい曲線を定式化することが可能であれば、CAD 等のデザインツールを開発するうえで、曲線の生成や変形、その品質の評価等において、標準や規範となる曲線を定義・参照することが可能となり、デザインの質を著しく向上させることが期待できる。

原田ら<sup>1,2)</sup>は、日本刀や自動車のキーラインなどの人工物の美しい曲線だけでなく、鳥の卵や蝶の羽などの自然界に存在する美しい曲線の曲率対数分布図が直線で近似できること、さらにはその直線の傾きと曲線から得られる印象が強く連関していると指摘している。本稿ではそれらの指摘に基づいて開発された曲率対数分布図が直線で与えられる曲線：美的曲線について、その導出法、全体像および入力法について解説するとともに、その理論の曲面への拡張について簡単に現状を述べる。

## 2. 美的曲線の定式化<sup>3,5)</sup>

この章では、まず曲率対数分布図の解析的な定義を述べ、その定義に基づいて美しい曲線の一般式を導出する。この一般式を満たす曲線として美的曲線を定義し、さらにその空間曲線への拡張について説明する。

### 2.1 解析的な曲率対数分布図

原田ら<sup>1)</sup>の曲率対数分布図の定義は手続き的であり、ここでは解析的に曲率対数分布図を求めることを考える。中野ら<sup>7)</sup>は曲線  $C(t) = (x(t), y(t))$  に対して、曲率半径の対数値を  $R = \log \rho$  とし、横軸に曲率半径の対数  $R$ 、縦軸に曲率半径の微小変化に対する曲線長（弧長）の変化量の対数  $\log(ds/dR)$  をとったグラフは曲率対数分布図に数学的に一致すると指摘している。したがって、曲率対数分布図の傾きは  $\log(ds/d(\log \rho))$  であり、 $s, \rho$  とともにパラメータ  $t$  の関数なので、

$$\begin{aligned} \log \frac{ds}{d(\log \rho)} &= \log \frac{\frac{ds}{dt}}{\frac{d(\log \rho)}{dt}} = \log \left( \rho \frac{ds}{d\rho} \right) \\ &= \log \rho + \log \frac{ds}{d\rho} \end{aligned} \quad (1)$$

上式より、その意味があまり明確でなかった曲率対数分布図が、曲率半径、曲線長および曲線長の変化率の3項により解析的に定義されることが理解できる。

### 2.2 美しい曲線の一般式

本節では曲率対数分布図が直線となる曲線の一般式を求め、後述するように導出された式は非常に簡潔であり、直線や円弧、その他よく知られた曲線を含み、美しい曲線を一般的に表す式と考えることができる。そこで、本稿ではそれを美しい曲線の一般式と呼ぶ。

#### 2.2.1 一般式の導出

式(1)より、曲率対数分布図の縦軸が  $\log(\rho ds/d\rho)$  で与えられ、それが直線で与えられると仮定し、その直線の傾きを  $\alpha$  とすると、

$$\log \left( \rho \frac{ds}{d\rho} \right) = \alpha \log \rho + C \quad (2)$$

が成り立つ。ここで  $C$  は定数である。この式を美しい曲線の基本方程式と呼ぶ。式(2)を変形すると、

$$\frac{1}{\rho^{\alpha-1}} \frac{ds}{d\rho} = e^C = C_0 \quad (3)$$

したがって、

$$\frac{ds}{d\rho} = C_0 \rho^{\alpha-1} \quad (4)$$

よって、 $\alpha \neq 0$  であれば、

$$s = \frac{C_0}{\alpha} \rho^\alpha + C_1 \quad (5)$$

上式で  $C_1$  は積分定数である。したがって、

$$\rho^\alpha = C_2 s + C_3 \quad (6)$$

と書ける。ただし、 $C_2 = \alpha/C_0$ 、 $C_3 = -(C_1\alpha)/C_0$  である。定数  $C_2, C_3$  をそれぞれ新たに  $c_0, c_1$  とすると、

$$\rho^\alpha = c_0 s + c_1 \quad (7)$$

となる。すなわち、曲率半径  $\rho$  の  $\alpha$  乗が曲線長  $s$  の1次式で与えられる。この式を美しい曲線の第1一般式と呼ぶ。

$\alpha = 0$  の場合は、

$$s = C_0 \log \rho + C_1 \quad (8)$$

したがって、

$$\rho = C_2 e^{C_3 s} \quad (9)$$

\* 原稿受付 平成 19 年 9 月 20 日

\*\* 正 会 員 静岡大学（静岡県浜松市城北 3-5-1）

\*\*\* 正 会 員 日本大学（千葉県習志野市泉町 1-2-1）

となる。ただし、 $C_2 = e^{-C_1/C_0}$ 、 $C_3 = 1/C_0$  である。定数  $C_2$ 、 $C_3$  をそれぞれ新たに  $c_0$ 、 $c_1$  とすると、

$$\rho = c_0 e^{c_1 s} \quad (10)$$

となる。すなわち、曲率半径  $\rho$  は曲線長の指数関数で与えられる。この式を美しい曲線の第 2 一般式と呼ぶ。

「美しい」は魅力的な言葉であるが、主観的な日常用語であり、個人の感性に応じて様々な美しい曲線が考えられるので、「美しい曲線」をここで説明した第 1 一般式および第 2 一般式で表現される曲線に限定する場合には、それらの曲線を「美的曲線」と呼ぶ。

クロソイド曲線は美しい曲線の 1 つとされ<sup>6)</sup>、その曲率(曲率半径)が曲線長に比例(反比例)することはクロソイド曲線の基本的な性質である。式(7)において、 $\alpha = -1$  とし、 $c_1 = 0$  とすると、曲率半径の逆数、すなわち曲率が曲線長に比例し、クロソイド曲線が美しい曲線の第 1 一般式を満足することがわかる。同様に、対数(等角)らせんは  $\alpha = 1$ 、インボリュート曲線は  $\alpha = 2$  であり、これらの曲線も美的曲線の例となっている。さらに、式(7)において  $c_0 = 0$  であれば曲率半径が曲線長に依らずに一定となり、直線や円弧を表していると解釈できる。また、第 2 一般式を満足する曲線は Nielsen のらせんと呼ばれている。

### 2.2.2 美的曲線のパラメータ表現

式(7)や式(10)は曲線の性質を簡潔に表現しているが、曲線の生成や描画には適していない。そこで、美的曲線をパラメータを用いて定式化しよう。曲線  $C(s)$  が美しい曲線の第 1 一般式(7)を満足すると仮定すると、

$$\rho(s) = (c_0 s + c_1)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (11)$$

が成り立つ。 $s$  が曲線長であることから、 $|ds/dt| = 1$  であり、以下の 2 式を満たす  $\theta(s)$  が存在して、

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \theta \quad (12)$$

したがって、 $\rho(s) = 1/(d\theta/ds)$  であることから、

$$\frac{d\theta}{ds} = (c_0 s + c_1)^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (13)$$

$\alpha \neq 1$  の場合は、

$$\theta = \frac{\alpha(c_0 s + c_1)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}{(\alpha-1)c_0} + c_2 \quad (14)$$

以上のことから、曲線は始点を  $P_0 = C(0)$  とすると、

$$C(s) = P_0 + e^{ic_2} \int_0^s e^{i \frac{\alpha(c_0 s + c_1)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}{(\alpha-1)c_0}} ds \quad (15)$$

と与えられる。この式はクロソイド曲線の定義に含まれる  $e$  の指数の乗数を 2 から  $(\alpha-1)/\alpha$  に拡張した形式(拡張クロソイド曲線)となっており、0, 1 を除いて傾き  $\alpha$  を任意の値とすることができる。

$\alpha = 1$  の場合は、

$$\frac{d\theta}{ds} = (c_0 s + c_1)^{-1} \quad (16)$$

$$\theta = \frac{1}{c_0} \log(c_0 s + c_1) + c_2 \quad (17)$$

ここで、 $t = \log(c_0 s + c_1)/c_0$  とパラメータ化し、積分区間  $[0, s]$  を  $[0, t]$  に変更すると、

$$\int_0^t e^{i\theta} ds = e^{ic_2} \int_0^t e^{(c_0+i)t} dt \quad (18)$$

となり、積分が可能で次式で与えられる対数らせんが得られる。

$$C(t) = P_0 + \frac{e^{ic_2}}{c_0 + i} (e^{(c_0+i)t} - 1) \quad (19)$$

第 2 一般式の場合は、

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{c_0} e^{-c_1 s} \quad (20)$$

$$\theta = -\frac{1}{c_0 c_1} e^{-c_1 s} + c_2 \quad (21)$$

したがって、曲線は、

$$C(s) = P_0 + e^{ic_2} \int_0^s e^{-\frac{i}{c_0 c_1} e^{-c_1 s}} ds \quad (22)$$

と定式化される。

### 2.3 美的曲線の自己アフィン性

美的曲線に対して、曲線上の任意の点において直交する 2 つの方向、すなわち、主法線方向と接線方向に別々に異なる倍率でスケールングすることにより元の曲線が得られ、これを曲線の自己アフィン性と定義する。この美的曲線の持つ自己アフィン性は、位置に依存して変化する座標系におけるアフィン変換による自己相似性と考えられる。アフィン変換に用いられる行列は、変化する座標系で表せば一定であるが、曲線全体に対して固定された座標系で表される 1 つの定数行列が存在するわけではない。この曲線の自己アフィン性は曲率対数分布図が直線で与えられることの必要十分条件であり、美的曲線は自己アフィン性を持つ曲線と定義することもできる<sup>4)</sup>。

### 2.4 3次元への拡張<sup>4)</sup>

これまで述べてきた美的曲線は平面曲線であり、意匠デザイン等の実務への応用のためには空間曲線を定義できることが望まれる。フルネー・セレー (Frenet-Serret) の公式に基づいて、自己アフィン性を持たせ美的曲線を 3 次元に拡張し、美的空間曲線を定義する方法について以下に述べる。

曲線長  $s$  の関数として与えられた空間曲線  $C(s)$  に対して、単位接線ベクトルを  $t$ 、単位主法線ベクトルを  $n$ 、単位従法線ベクトルを  $b$  とする。これらのベクトルは次式で与えられるフルネー・セレーの公式により関係付けられる。

$$\begin{aligned} \frac{dC(s)}{ds} &= t, \quad \frac{dt}{ds} = \kappa n, \\ \frac{dn}{ds} &= -\kappa t + \tau b, \quad \frac{db}{ds} = -\tau n \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、 $\kappa$  は曲率であり  $\tau$  は捩率である。

平面曲線では従法線ベクトルの向きは一定であり、捩率は常に 0 であるが、空間曲線では捩率を考慮する必要がある。そこで、まず空間曲線の自己アフィン性を定義し、自己アフィン性を満足する曲線として美的空間曲線を定義する。

空間曲線の自己アフィン性を、曲線の任意の先端部を削除した曲線に対して、曲線上の各点において接線方向、主法線方向および従法線方向にそれぞれ異なる倍率でスケールングすることにより元の曲線が得られるとき、曲線は自己アフィン性を持つ、と定義する。

曲率と捩率、したがってそれらの逆数である曲率半径と捩率半径とは独立に指定できるので、捩率半径  $\mu = 1/\tau$  について、式(2)と同様な次式が成り立つと仮定する。

$$\log\left(\mu \frac{ds}{d\mu}\right) = \beta \log \mu + C' \quad (24)$$

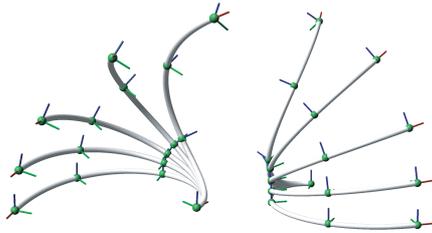


Fig. 1 フルネー・セレーの公式による拡張

ここで  $\beta$  は定数である．したがって，

$$\frac{1}{\mu^{\beta-1}} \frac{ds}{d\mu} = C'_0 \quad (25)$$

フルネー・セレーの公式を連立微分方程式と考え，数値積分により曲線の形状を求めた例を図 1 に示す．左右の図は同じ 5 本の曲線を異なる視点で描画しており，図中最も下に描かれた曲線は撓率を常に 0 に保ち曲率半径を曲線長の 1 次式として変化させて，平面曲線である対数らせんを描いている．他の曲線は始点と曲率半径の変化をこの対数らせんと一致させ，撓率半径については  $\beta = 1$  として曲線長の 1 次式として変化させている．上の曲線ほど撓率半径の 1 次式の曲線長の係数を小さく（撓率をより大きく）している．各曲線に対して，始点，終点および曲線上の 2 点で動標構（フルネー標構）の接線，主法線，従法線の各ベクトルを細い円筒として描いている．

### 3. 美的曲線の全体像

美的曲線は，美しい曲線の一般式（式 (2)）に基づく平面曲線である．この式に基づく曲線を考える場合に，曲線が平面上の任意の位置にあるとすると，変換を考慮しなければならないため曲線式が複雑になる．そこで，美的曲線を相似変換した“標準型”を考える．標準型では，曲線上の  $\rho = 0$  または  $\rho = \infty$  以外の任意の点（この点を基準点とする）を原点に平行移動させ，接線ベクトルを  $x$  軸の正の方向を向くように回転させ，基準点での曲率半径が 1 になるようにスケール倍する．また，基準点において，曲線長  $s$  および方向角  $\theta$  ( $x$  軸と曲線の接線ベクトルとのなす角) はともに 0 であるとする．

図 2 に標準型における美的曲線の全体像を示す．美的曲線の詳細な性質は文献<sup>(8,9)</sup>に記述されているが， $\alpha < 0$  の場合には変曲点が有限点に存在し接線方向が定まること， $\alpha > 1$  の場合には  $\rho = 0$  の点が有限点に存在し接線方向が定まることなどの性質が分かっている．また， $\alpha = \pm\infty$  の極限において美的曲線は円になる．

曲率対数分布図の直線の傾き  $\alpha$ ，方向角  $\theta$  の美的曲線上の点は， $i$  を虚数単位とし，複素平面上で次式で表される<sup>(8,9)</sup>．

$$P(\theta) = \begin{cases} \int_0^\theta e^{(\Lambda+i)\psi} d\psi & \text{if } \alpha = 1 \\ \int_0^\theta ((\alpha-1)\Lambda\psi + 1)^{\frac{1}{\alpha-1}} e^{i\psi} d\psi & \text{otherwise} \end{cases} \quad (26)$$

ここに， $\Lambda (> 0)$  は，基準点における  $ds/d\rho$  の逆数という意味を持ち，美的曲線の  $\alpha$  が 1 以外の場合には曲線を相似形に変換させるパラメータであり， $\alpha = 1$  の場合には曲線形状を変化させるパラメータである．特殊な場合として， $\Lambda = 0$  のとき，美的曲線は  $\alpha$  の値に関わらず円になる． $\theta$  には， $\alpha$  に応じて上限または下限が存在する場合がある． $\alpha < 1$  の場合には上限  $1/\{\Lambda(1-\alpha)\}$  が， $\alpha > 1$  の場合には下限  $1/\{\Lambda(1-\alpha)\}$  が存在し， $\alpha = 1$  の場合には上限も下限も存在しない．

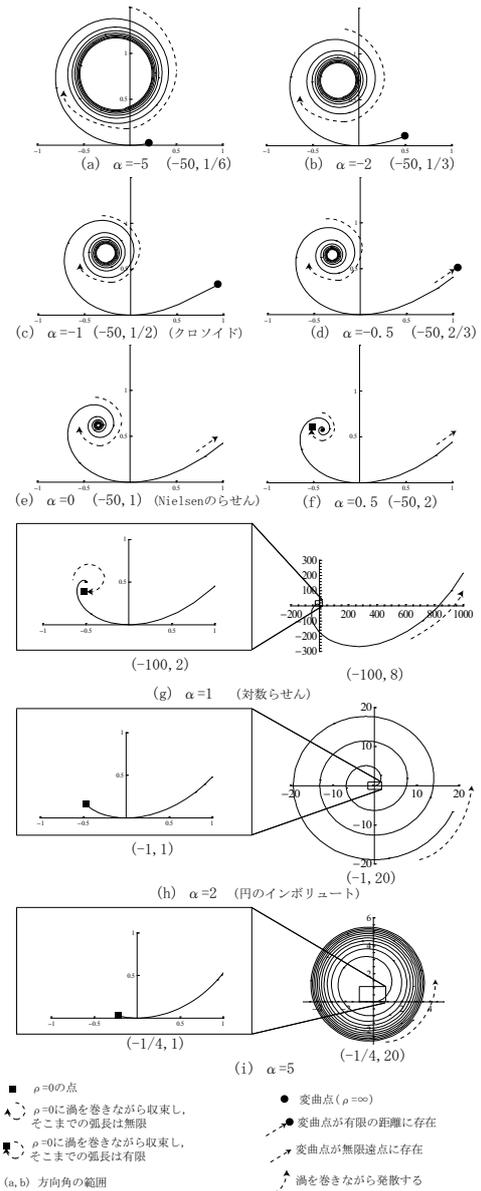


Fig. 2 美的曲線の全体像

図 2 の美的曲線は  $\Lambda = 1$  の場合であり，図 3 に  $\alpha = -1, 1$  の美的曲線の  $\Lambda$  を変化させた様子を示す．式 (26) は方向角により定式化した式であるが，曲線長  $s$  によって定式化することも可能であり，曲線長  $s$  と方向角  $\theta$  には関係式が存在する<sup>(8,9)</sup>．美的曲線を紹介するビデオを <http://www.yoshida-lab.net/aesthetic/> に置いているのであわせてご覧ください．

### 4. 美的曲線セグメント

美的曲線セグメントは， $\alpha$  が指定された場合に，2 次の Bézier 曲線のように 3 点を指定することによって描くことが可能である．美的曲線セグメントは，NURBS などの自由曲線と異なり，曲率変化が単調であることが保証され，曲率変化の度合いを一つのパラメータ  $\alpha$  によって変化させることができるという特徴を持つ．

美的曲線セグメントを描くアイデアは次のようなものである．3 点  $P_a, P_b, P_c$  が指定されると，両端での位置と接線方向が指定され，この 3 点により三角形  $P_a P_b P_c$  が定められる．また，両端点における接線ベクトルの変化から方向角の

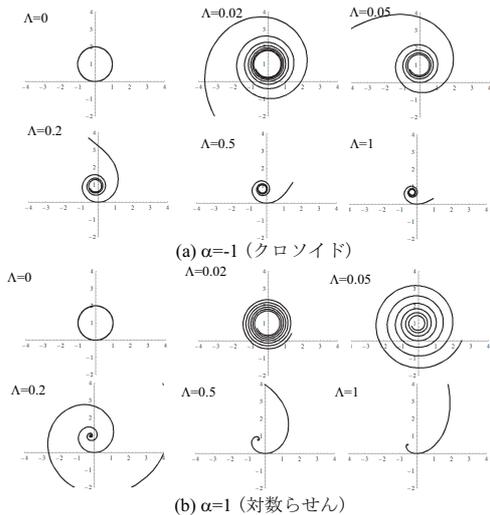


Fig. 3 様々な  $\Lambda$  の  $\alpha = -1$  および  $\alpha = 1$  の美的曲線

変化  $\theta_D$  が決まる．美的曲線の全体像において，ある点  $P_0$  とそこから方向角  $\theta_D$  だけ離れた点  $P_2$  を考え， $P_0$  と  $P_2$  における接線の交点として  $P_1$  が求まり，三角形  $P_0P_1P_2$  が定まる．もし，三角形  $P_aP_bP_c$  と三角形  $P_0P_1P_2$  が相似形であるならば，美的曲線の全体上における  $P_0$  から  $P_2$  へ向かう曲線セグメント上の点に， $P_0, P_1, P_2$  が  $P_a, P_b, P_c$  に移るような相似変換を施せば，3点  $P_a, P_b, P_c$  にフィットする美的曲線セグメントを描くことができる(図 4(a))．三角形  $P_aP_bP_c$  と相似な三角形  $P_0P_1P_2$  は， $\Lambda$  を変化させることによって二分法によって探索する． $\Lambda$  には， $\alpha$  と  $\theta_D$  に依存する上限が存在する場合がある．詳細は，文献<sup>(8,9)</sup>を見られたい．美的曲線セグメントを描く場合に， $\alpha$  に応じて図 4(a),(b) の 2つの配置を用いる理由は，曲線が  $\rho = 0$  または  $\rho = \infty$  を含む場合に， $\Lambda$  の値が無限大になるのを避けるためである．

美的曲線セグメントは，曲率変化に対する強い拘束から， $\alpha$  の値と 3 点の配置によって曲線が描けない場合が存在する．図 5(a)-(f) において，四角形は， $(\pm 1, \pm 1)$  の領域を表し，美的曲線の第一の点を  $(-1, 0)$ ，第三の点を  $(1, 0)$  におき，第二の点を四角形内で移動させた場合に，曲線が描ける場合には第二の点に対応する位置を白で，描けない場合には黒で塗ったものである．この図から分かるように， $\alpha$  が 0 より小さくなればなるほど，または  $\alpha$  が 1 より大きくなればなるほど描画可能領域が狭くなっていることが分かる．

式 (26) で表される美的曲線は，積分形式であるため，NURBS や Bézier 曲線に代表される自由曲線と互換性を持たない．この問題に対して，美的曲線上の点を B-spline 曲線により補間し近似する手法<sup>4)</sup>や，美的曲線セグメントの両端での位置，接線方向および曲率の値を満足させ，かつ曲率の単調性を確認することのできる擬似美的曲線(有理 3 次 Bézier 曲線)が提案されている<sup>10,11)</sup>．

### 5. 曲面への拡張

美的曲線理論の曲面への拡張に関する研究はほとんどなく，今まさに実り多いであろう美しい造形の世界への扉を開けようとしている段階にある．微分幾何学に基づく拡張について模索しているが，曲線に対して「曲率対数分布図が直線と与えられる」という原田らの指摘に類似した，曲面の性質に対する

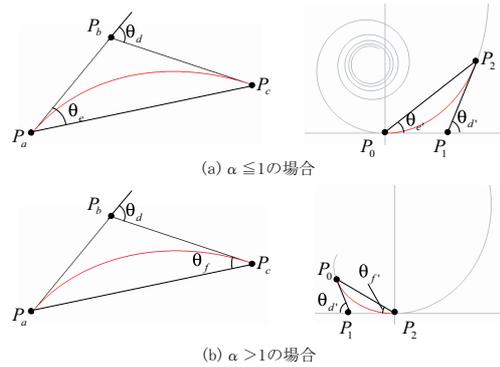


Fig. 4 美的曲線セグメントとそれに対応する全体像

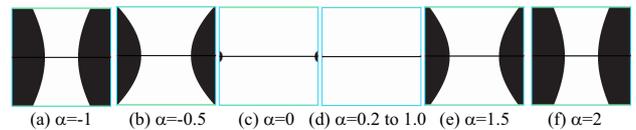


Fig. 5 様々な  $\alpha$  の美的曲線の描画可能領域

デザイナーからの指摘を待ち望んでいるのが現状である．

### 6. まとめ

以上，主に美しい曲線として我々が提案している「美的曲線」について解説した．美的曲線は日本で生まれ育った純国産の理論・技術であり，我々はこの理論・技術を大切に育てて行きたいと考えている．現在，美しい曲線・曲面の定式化へ向けて研究を重ねているが，その研究の現状は，Bézier 曲線が誕生したばかりの頃の状況に似ているのであろう．Bézier 曲線が誕生したばかりの頃，曲線セグメントをどのように接続したらよいかの問題であり，その後接続性の問題を解決した B-spline 曲線が誕生している．美的曲線をどのように接続すると美しさが保たれるのか，美しい空間曲線・曲面をどのように生成するのかなど多くの課題が山積されている．今後，どのような展開が生まれるのか，期待に胸を膨らませながら研究を行っている．

### 参考文献

- 1) 原田利宣, 森典彦, 杉山和雄: 曲線の物理的性質と自己アフィン性, デザイン学研究, 42, 3, (1995) 33.
- 2) 原田利宣, 吉本富士市, 森山真光: 魅力的な曲線とその創生アルゴリズム, 形の科学会誌, 13, 3, (1998) 149.
- 3) 三浦憲二郎: 美しい曲線の一般式, グラフィックスと CAD/Visual Computing 合同シンポジウム 2005 予稿集, (2005) 227.
- 4) 三浦憲二郎, 藤澤誠: 美的曲線の 3 次元への拡張と B-spline 曲線による近似, グラフィックスと CAD/Visual Computing 合同シンポジウム 2006 予稿集, (2006) 83.
- 5) 三浦憲二郎: 美しい曲線の一般式とその自己アフィン性, 精密工学会誌 72, 7, (2006) 857.
- 6) 高梨隆雄: 美的設計方法論, ダヴィッド社, (2002).
- 7) 中野雄矢, 金谷一郎, 佐藤宏介: 立体曲率対数分布を用いた意匠曲面の感性的分類, FIT(情報科学フォーラム), J-028, (2003) 253.
- 8) 吉田典正, 齋藤隆文: 美しい曲線の全体像解明と対話的制御, Visual Computing/グラフィックスと CAD 合同シンポジウム, (2006), 77.
- 9) N. Yoshida and T. Saito: Interactive Aesthetic Curve Segments, The Visual Computer (Proc. Pacific Graphics), 22, 9-11, (2006) 896.
- 10) 吉田典正, 齋藤隆文, 平岩智之: 曲率単調な曲線セグメントの対話的制御, Visual Computing/グラフィックスと CAD 合同シンポジウム, (2007) 19.
- 11) N. Yoshida and T. Saito: Quasi-Aesthetic Curves in Rational Cubic Bezier Forms, Computer-Aided Design & Applications, 4, 1-4, (2007) 477.