

# ヒステリシス制御付き対数型美的曲線の生成

静岡大学 ○三浦憲二郎, 關根唯敏, 白杵深, マレーシア科学大学 R.U. Gobithaasan, Md Yushalify Misro

## Hysteresis-controlled Log-aesthetic Curve Generation for Stable Shape Transition

Shizuoka University K.T. Miura, T. Sekine, S. Usuki, University Science Malaysia R.U. Gobithaasan, Md Yushalify Misro

This report presents a **hysteresis-based clothoid curve generation method** that prevents abrupt shape changes ( “pop-up” ) when terminal conditions are updated. By introducing regularization terms to penalize parameter deviation from the previous solution, the method ensures smooth transition of the curve. A deadzone tolerance is also introduced so that the endpoint and orientation are satisfied only when necessary, improving stability for interactive design and computer graphics applications.

## 1. 緒言

本研究では、形状パラメータ  $\alpha < 0$  の Log-Aesthetic Curve (LAC) を対象に、終端方向角および形状パラメータの変化に対してポップアップ (急激な形状変化) を抑制するヒステリシス制御に基づく生成法を示す。曲率  $\kappa(s)$  を弧長  $s$  の関数として符号付きで定義し、方向角は解析式で、座標は数値積分で評価することにより、安定な最小二乗解法を実現する。さらに、終端方向角  $\theta_e$  と形状パラメータ  $\alpha$  の二重ヒステリシス更新を提案し、形状モデリングや CG 用途における連続形状編集に有効であることを数値例で示す。

## 2. ヒステリシス

形状モデリング分野ではヒステリシスという用語が使われるることはこれまでになく、ここではヒステリシスについて概説する。ヒステリシスとは、ある系の状態が、現在加えられている力だけでなく、過去に加わった力 (履歴) に依存して変化する現象を指す。これは履歴現象、または履歴効果とも呼ばれる。具体例としてよく取り上げられる現象は磁気ヒステリシスであり、磁界の大きさを変化させた際、強磁性体の磁化の強さが直前の磁化状態に支配されて非可逆的な変化をする。

この関係はヒステリシス曲線で表され、磁気記録装置などに利用されている。

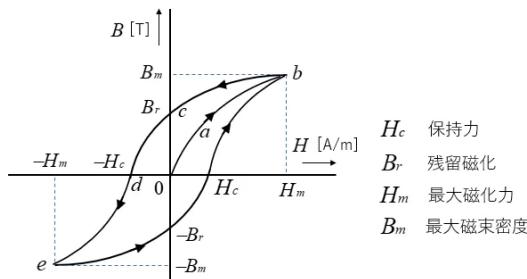


Fig. 1 磁気ヒステリシス曲線。

曲線生成において、両端点の位置、方向角を指定して曲線を生成する場合、クロソイド曲線や対数型美的曲線の生成では、曲線がループすることを避けるため、それらの境界条件を満足する最短の曲線をすることが、通常行われており、このように曲線を生成すると曲線の形状が急激に変わるポップアップを避けることはできない [1, 2]。

## 3. 対数型美的曲線 [3, 4]

対数型美的曲線の曲率半径  $\rho$  と曲線長  $s$  の関係は以下の式で表わされる。

$$\rho(s) = \begin{cases} e^{cs+d} & (\alpha = 0) \\ (cs + d)^{\frac{1}{\alpha}} & (\alpha \neq 0) \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $c, d$  は定数、 $\alpha$  は曲率対数グラフの傾きである。

曲線の方向角  $\theta$  と曲線長  $s$  の関係は  $\rho = ds/d\theta$  の関係式から求めることができ、以下のように表される。

$$\theta(s) = \begin{cases} \frac{-1}{c} e^{-cs-d} + \theta_e & (\alpha = 0) \\ \frac{1}{c} \log(cs + d) + \theta_e & (\alpha = 1) \\ \frac{1}{c} \frac{\alpha}{\alpha-1} (cs + d)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} + \theta_e & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (2)$$

ここで、 $\theta_e$  は積分定数である。 $\theta_e$  は  $s = 0$  での方向角  $\theta(0)$  によって定まる。

曲線上の点  $\mathbf{P}$  は、 $s$  の関数として以下のように記述できる。ただし、 $i$  は虚数単位であり、 $\mathbf{P}$  は複素平面上の点である。 $\mathbf{P}_0$  は曲線の始点とする。

$$\mathbf{P}(s) = \mathbf{P}_0 + \begin{cases} e^{i\theta_e} \int_0^s \exp\left(\frac{-i}{c} e^{-cs-d}\right) ds & (\alpha = 0) \\ e^{i\theta_e} \int_0^s \exp\left(\frac{i}{c} \log(cs + d)\right) ds & (\alpha = 1) \\ e^{i\theta_e} \int_0^s \exp\left(\frac{i}{c} \frac{\alpha}{\alpha-1} (cs + d)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right) ds & (\text{other}) \end{cases}$$

$c, d$  の値を定めることは曲線のどの部分を用いるかを決定することであり、 $\alpha$  の値によって曲線の形状は変化し、それにしたがって曲線の印象も変化する [5]。対数型美的曲線を空間曲線に拡張することも提案されており [6]、フルネー・セレーの公式 [8] を連立微分方程式と考え、数値積分により曲線の形状を求めることができる。特に  $\alpha = -1$  のときクロソイド曲線を表している。

## 4. クロソイド曲線のヒステリシス付き最適化

本研究では、従来の残差ベクトルに加え、

$$\mathbf{r}_{\text{end}} = [w_\theta(\theta(L) - \theta_e), w_x(x(L) - x_e), w_y(y(L) - y_e)]^\top$$

に加え、前回解  $(k_0^{(p)}, k'^{(p)}, L^{(p)})$  との差を抑制する正則化項を導入する：

$$\mathbf{r}_{\text{reg}} = [r_{k0}(k_0 - k_0^{(p)}), r_{k'}(k' - k'^{(p)}), r_L(L - L^{(p)})]^\top.$$

これにより、最小化対象は

$$\min_{k_0, k', L} \|\mathbf{r}_{\text{end}}\|^2 + \|\mathbf{r}_{\text{reg}}\|^2$$

となる。 $r_{k0}, r_{k'}, r_L$  が大きいほど、前回形状からの変化が小さくなり、ヒステリシス効果が強まる。

#### 4.1 デッドゾーン付き残差

実際の応用では、終点を必ず通過させる必要がない場合も多い。そのため、終点の位置・角度に許容帯（デッドゾーン）を設け、一定範囲内では残差をゼロとする：

$$r_\theta = \begin{cases} 0, & |\Delta\theta| \leq \theta_{tol} \\ w_\theta(|\Delta\theta| - \theta_{tol}) \operatorname{sign}(\Delta\theta), & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$r_p = \begin{cases} 0, & \|\mathbf{p}_e - \mathbf{p}(L)\| \leq \rho_{tol} \\ w_p(\|\mathbf{p}_e - \mathbf{p}(L)\| - \rho_{tol}) \frac{\mathbf{p}_e - \mathbf{p}(L)}{\|\mathbf{p}_e - \mathbf{p}(L)\|}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

これにより、終点が許容範囲内にある場合は調整が行われず、滑らかな形状更新が可能となる。

#### 4.2 MATLAB 実装

本手法は `lsqnonlin` を用いて実装された。以下は主要な呼び出し例である。

```
sol1 = clothoid_connect(Ps, thetas, Pe, thetae);
thetae2 = thetae + 1*pi/180; % 終端角を更新
sol2 = clothoid_hysteresis_update_v2(Ps, thetas, ...
    Pe, thetae2, sol1, ...
    'Weights', [3.0, 3.0], ...
    'PostTol', 1e-3, ...
    'AngTol', deg2rad(0.2), ...
    'Reg', [1, 1, 0.2], ...
    'npts', 1200, 'Plot', true);
```

#### 4.3 数値例

図 2 に、 $P_s = (-1, -1)$ ,  $P_e = (2, 0.5)$ ,  $\theta_s = 20^\circ$ ,  $\theta_e = 70^\circ$  の初期曲線 (a) と、終端角を  $1^\circ$  ずつ増加させたヒステリシス更新結果 (b) を示す。曲線は連続的に変形し、形状の跳躍が生じていない。

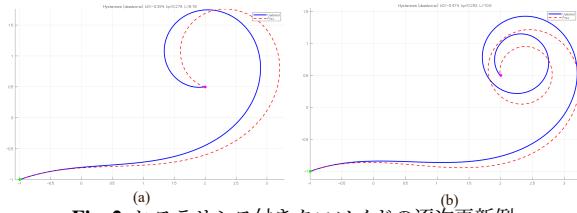


Fig. 2 ヒステリシス付きクロソイドの逐次更新例

#### 5. LAC のヒステリシス付き最適化

本節では、形状パラメータ  $\alpha$  と終端方向角  $\theta_e$  の両方にヒステリシス制御を導入した Log-Aesthetic Curve (LAC) の数値的生成例を示す。図 3 は、初期曲線から最終曲線に至るまでの連続的な形状変化を重ね描きしたものである。

各曲線は、 $\alpha$  を  $-1.06$  から  $-0.70$  へ段階的に増加させると同時に、終端方向角  $\theta_e$  を  $50^\circ$  から  $140^\circ$  まで  $10^\circ$  刻みで更新して得られた。凡例には、各ステップにおける  $\alpha$  と  $\theta_e$  の値を示している。

更新は、前ステップの解を基準解として用いるヒステリシス更新則に基づいて行われており、位置誤差および角度誤差に対する許容範囲内で解を追従的に更新することで、数値解の分岐や急激な形状変化（ポップアップ）を抑制している。

図から分かるように、 $\alpha$  および  $\theta_e$  を同時に変化させたにもかかわらず、すべての曲線は互いに近接した形状を保ちながら連続的に変形しており、本手法がインタラクティブな形状編集において高い視覚的安定性を有することが確認できる。

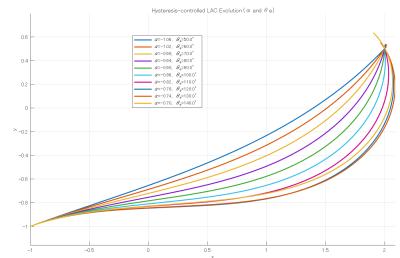


Fig. 3 ヒステリシス制御による Log-Aesthetic Curve の進化例。形状パラメータ  $\alpha$  と終端方向角  $\theta_e$  を段階的に更新し、各ステップの曲線を重ね描きした。ヒステリシス更新により、終端条件の変化に対しても曲線形状が連続的に変形し、ポップアップが抑制されている。

#### 6. 考察

本手法により、クロソイド曲線の連続更新時における形状の不安定性（ポップアップ）を抑制できることが確認された。特に、

- 正則化係数  $r_{reg}$  の適切な設定で滑らかな推移が得られる。
- 許容帯  $\rho_{tol}, \theta_{tol}$  を設けると、過剰な補正が避けられる。
- CG 分野のインタラクティブ設計や経路補間に有効である。

従来のクロソイド曲線生成アルゴリズムに「形状保持項」と「デッドゾーン許容」を導入することにより、

- 境界条件の逐次更新に対して曲線が滑らかに変化する、
- 急激な形状飛躍（ポップアップ）が抑制される、
- 設計操作中でも視覚的に安定した形状更新が可能となる、

などの効果が得られる。本結果は、CG・CAD 分野における対話的な幾何モデリングにおいて非常に有効であると考えられる。

#### 7. 結言

本研究では、クロソイドを含む対数型美的曲線の生成にヒステリシス項とデッドゾーンを導入し、形状連続性を保ちながら安定に再生成する手法を提案した。今後は、 $G^2$  条件（両端曲率指定）について検討する。

#### 謝辞

本研究の一部は JSPS 科研費基盤研究 (B)19H02048 と JST CREST JPMJCR1911 の支援を受けた。

#### 参考文献

- 蘭豊礼, 玉井博文, 牧野洋, 三連クロソイドによる自由点列補間, 精密工学会誌, 76, 10, 1194-1199, 2010.
- 三浦憲二郎, 濵谷大, 白杵深, 蘭豊礼, 玉井博文, 牧野洋, 対数型美的曲線を用いた  $G^2$  Hermite 内挿法, 精密工学会誌, 79, 3, 260-265, 2013.
- Kenjiro T. Miura, R.U. Gobithaasan, "Aesthetic Curves and Surfaces in Computer Aided Geometric Design," International Journal of Automation Technology, Vol.8, No.3, pp. 304-316, 2014
- Kenjiro T. Miura, R.U. Gobithaasan, "Aesthetic Design with Log-Aesthetic Curves and Surfaces," Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis III, Springer Singapore, pp. 107-119, 2016.
- 原田利宣, 森典彦, 杉山和雄, 曲線の物理的性質と自己アフィン性, デザイン学研究, 42, 3, (1995) 33.
- 三浦憲二郎, 藤澤誠, 美的曲線の 3 次元への拡張と B-spline 曲線による近似, グラフィックスと CAD/Visual Computing 合同シンポジウム 2006 予稿集, (2006), 83.
- 三浦憲二郎, 美しい曲線の一般式とその自己アフィン性, 精密工学会誌 72(7), (2006), 857-861.
- G. Farin, *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design*, 5th Ed., Academic Press, 2002.